

FAN*

20 stycznia

1. Załóżmy, że $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ spełniają $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$. Wykazać, że jeśli funkcja całkowita f spełnia

$$f(z + \omega_1) = f(z) = f(z + \omega_2) \quad \text{for every } z \in \mathbb{C},$$

to f jest stała.

Jeśli nie jest stała, to nazywamy ją funkcją eliptyczną.

2. Wykazać, że funkcja eliptyczna f ma co najmniej dwa (licząc z krotnościami) bieguny w równoległoboku podstawowym P_0 .

Liczbę biegunów f w P_0 nazywamy rzędem funkcji eliptycznej f .

3. Wykazać, że funkcja eliptyczna f rzędu m ma dokładnie m (licząc z krotnościami) zer w równoległoboku podstawowym P_0 .

4. Wykazać, że funkcja eliptyczna f rzędu m w równoległoboku podstawowym P_0 dokładnie m (licząc z krotnościami) rozwiązań równania $f(z) = c$.

5. Wykazać, że dla każdego $r > 2$ zachodzi

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{(|n| + |m|)^r} < \infty \quad \text{i} \quad \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{(|n| + |m|)^2} = \infty.$$

6. Dane są $r > 2$, $\text{Im } \tau > 0$, $\Lambda = \{n + \tau m \in \mathbb{C} : n, m \in \mathbb{Z}\}$ i $\Lambda^* = \Lambda \setminus \{0\}$. Wykazać, że

$$\sum_{\omega \in \Lambda^*} \frac{1}{|\omega|^r} < \infty \quad \text{and} \quad \sum_{\omega \in \Lambda^*} \frac{1}{|\omega|^2} = \infty.$$

7. Dla ustalonych $\text{Im } \tau > 0$, $\Lambda = \{n + \tau m \in \mathbb{C} : n, m \in \mathbb{Z}\}$ oraz $\Lambda^* = \Lambda \setminus \{0\}$ wykazać, że funkcja

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left(\frac{1}{(z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

jest (dobrze określoną) funkcją eliptyczną rzędu 2, z biegunami rzędu 2 w każdym punkcie kraty Λ oraz że ma okresy 1 i τ . Każdą taką funkcję nazywamy funkcją $\wp$ (czyt. pe) Weierstrassa.

Komenda na $\wp$ w LaTeX-u to $\wp$.

8. Udowodnić, że

$$(\wp')^2 = 4(\wp - \wp(1/2))(\wp - \wp(\tau/2))(\wp - \wp((1 + \tau)/2)).$$

9. Wykazać, że każda parzysta funkcja eliptyczna o okresach 1 i τ to pewna funkcja wymierna funkcji $\wp$.

10. Wykazać, że każda funkcja eliptyczna o okresach 1 i τ to pewna funkcja wymierna funkcji $\wp$ i $\wp'$.