

FAN*

13 stycznia 2026

Definicja 1. Dla danej funkcji całkowitej f jej *rzęd (wzrostu)* ρ_f definiujemy jako kres dolny tych liczb dodatnich ρ , dla których istnieją stałe A, B , takie że $|f(z)| \leq Ae^{B|z|^\rho}$ na $\mathbb{C}$.

Fakt z wykładu

- (a) Jeśli $\rho_f < \rho$, to $n_f(r) \leq C(1 + r^\rho)$ dla pewnego $C > 0$.
- (b) Jeśli $z_1, z_2, \dots$ to różne od 0 zera funkcji f , to dla każdego $s > \rho$ szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^s}$ jest zbieżny.

1. Wyznaczyć rząd funkcji $f(z) = \sin(\pi z)$. Wyznaczyć też zbiór tych $s > 0$, dla których szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^s}$ jest zbieżny (gdzie z_j to różne od 0 zera funkcji f).

Przypomnijmy oznaczenia z wykładu: $E_0(z) = 1 - z$ oraz, dla $k \geq 1$, $E_k(z) = (1 - z)e^{z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \dots + \frac{1}{k}z^k}$.

Twierdzenie 1 (Twierdzenie Hadamarda o faktoryzacji). Niech a_n będzie ciągiem różnych od 0 zer (licząc z krotnościami) funkcji f rzędu $\rho_f \in [k, k+1)$. Wówczas

$$f(z) = e^{P(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k(z/a_n),$$

gdzie m to rząd zera w 0, zaś P jest wielomianem stopnia co najwyżej k .

2. Wykazać, że dla każdego $z \in \mathbb{C}$ zachodzą wzory

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad \text{oraz} \quad \sinh(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2}\right).$$

20 stycznia 2026

3. Niech $g \in \Sigma$. Wykazać, że $\text{vol}(\mathbb{C} \setminus g(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D})) = \pi(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2)$.

4. Niech $f \in \mathcal{S}$. Wykazać, że

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

dla wszystkich $z \in \mathbb{D}$.

5. Załóżmy, że

$$g \in \Sigma_0 = \{g \in \Sigma : g(\xi) \neq 0 \text{ dla wszystkich } |\xi| > 1\},$$

gdzie

$$\Sigma = \{g : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} : g \text{ jest uniwalentna oraz } g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots\}.$$

Wykazać, że dla każdego $|z| > 1$ zachodzi

$$|z| \left(1 - \frac{1}{|z|}\right)^2 \leq |g(z)| \leq |z| \left(1 + \frac{1}{|z|}\right)^2$$

oraz

$$\frac{|z| - 1}{|z| + 1} \leq \left| \frac{zg'(z)}{g(z)} \right| \leq \frac{|z| + 1}{|z| - 1}.$$

6. Niech $g \in \Sigma$. Udowodnić, że $\text{diam}(\mathbb{C} \setminus g(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})) \leq 4$.

7. Niech $g \in \Sigma$. Wykazać, że

$$\limsup_{|z| \rightarrow 1^+} |g(z) - b_0| \leq 2$$

oraz że

$$|g(z) - b_0 - z| \leq \frac{3}{|z|} \quad \text{dla wszystkich } |z| > 1.$$

8. Niech $g \in \Sigma$. Wykazać, że dla wszystkich $|z| > 1$ zachodzi nierówność

$$|g'(z) - 1| \leq \frac{1}{|z|^2 - 1}$$

i w konsekwencji

$$|g'(z)| \leq \frac{|z|^2}{|z|^2 - 1}.$$

9. Załóżmy, że $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ jest uniwalentna oraz $f(z) = z + \sum_{k=3}^{\infty} a_k z^k$ (tzn. $f \in \mathcal{S}$ i $a_2 = 0$). Wykazać, że $f(\mathbb{D})$ zawiera $D(0, \frac{1}{2})$.

FAN*

XI seria zadań domowych,
termin: 13 stycznia, godzina 10.15

Zadania 1-4 stanowią brakujące składniki dowodu twierdzenia o liczbach pierwszych pokazywanego na wykładzie.

1. Uzasadnić, że funkcja zadana całką

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$$

zadaje funkcję holomorficzną na $\{\operatorname{Re} z > 0\}$. Wykazać, że dla $s \in \{\operatorname{Re} z > 0\}$ zachodzi tożsamość $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. Wywnioskować stąd, że $\Gamma(n+1) = n!$ dla $n \in \mathbb{N}$.

2. Uzasadnić, że znany z AM wzór

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad \text{dla } s \in (0, 1)$$

zachodzi dla każdego $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

3. Załóżmy, że $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją niemalejącą, że całka $\int_1^\infty \frac{f(t)-t}{t^2} dt$ jest zbieżna. Wykazać, że $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

4. Wykazać, że jeśli $\operatorname{Re} s > 1$, to

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

gdzie $\mathcal{P}$ oznacza zbiór (dodatnich) liczb pierwszych.

5. Wyznaczyć rozwinięcie w iloczyn nieskończony na $\mathbb{C}$ funkcji $\sin z - z \cos z$.

6. Wykazać, że dla każdego $z \in \mathbb{C}$ zachodzi

$$\frac{\sin \pi z}{z(1-z)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z - z^2}{n^2 + n} \right).$$

7. Dana jest $\alpha > 1$. Wykazać, że funkcja

$$F_\alpha(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|^\alpha} e^{zt} dt$$

jest funkcją całkowitą rzędu $\frac{\alpha}{\alpha-1}$.