

FAN*

16 grudnia 2025

1. Niech $U \subset \mathbb{D}$ będzie obszarem, którego brzeg ma niepustą część wspólną z okręgiem jednostkowym. Niech dalej $V = \{\bar{z}^{-1} : z \in U\}$. Załóżmy, że funkcja $f : U \cup (\partial U \cap \partial \mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ jest ciągła oraz że $f \not\equiv 0$, $f \in \mathbb{H}(U)$ i $f(\partial U \cap \partial \mathbb{D}) \subset \partial \mathbb{D}$. Określmy funkcję $F : U \cup V \cup (\partial U \cap \partial V) \rightarrow \mathbb{C}$ wzorem

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{if } z \in \mathbb{D}, \\ \left(\overline{f(\bar{z}^{-1})}\right)^{-1} & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wykazać, że F jest meromorficzna na $U \cup V \cup (\partial U \cap \partial V)$ oraz holomorficzna na $U \cup \{\bar{z}^{-1} : z \in U, f(z) \neq 0\} \cup (\partial U \cap \partial V)$.

2. Załóżmy, że $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ jest funkcją ciągłą na $\mathbb{D}$, holomorficzną na $\mathbb{D}$ oraz że $f(\partial \mathbb{D}) \subset \partial \mathbb{D}$. Udowodnić, że:

- f jest funkcją wymierną;
- f ma miejsce zerowe w $\mathbb{D}$ lub f jest stała;
- jeśli f nie zeruje się na $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, to jest wielomianem.

3. Zrobić Zadanie o biholomorficzności pierścieni, używając zasady symetrii:

Wykazać, że jeśli pierścienie $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < R_1\}$ oraz $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : r_2 < |z| < R_2\}$ są biholomorficzne, to są jednokładne, a jedyne biholomorfizmy między nimi to złożenia sprzężonych inwersji, obrotów i jednokładności o skali $\frac{R_2}{R_1}$. Innymi słowy: jeśli istnieje funkcja biholomorficzna (czyli holomorficzna bijekcja) $f : A_1 \rightarrow A_2$, to $\frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2}$ oraz $f(z) = \frac{R_2}{R_1} cz^\alpha$, gdzie $|c| = 1$ i $\alpha \in \{-1, 1\}$.

Wzór Jensena

Niech D_R będzie otwartym dyskiem o środku w zerze i promieniu R i niech f będzie funkcją holomorficzną na obszarze U zawierającym domknięcie dysku D_R . Załóżmy, że $f(0) \neq 0$ oraz że f nie znika w żadnym punkcie z ∂D_R . Niech $z_1, \dots, z_N$ oznaczają wszystkie zera f w D_R (licząc z krotnościami). Wówczas

$$\ln |f(0)| = \sum_{k=1}^N \ln \left(\frac{|z_k|}{R} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{it})| dt.$$

Niech $n_f(r)$ oznacza liczbę zer f w D_r . Wtedy, przy założeniach wzoru Jensena,

$$\int_0^R \frac{n_f(r)}{r} dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{it})| dt - \ln |f(0)|.$$

4. Znaleźć odpowiednik wzoru Jensena dla niestałej funkcji zerującej się w zerze.

5. Załóżmy, że $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ jest niestałą ograniczoną funkcją holomorficzną.

- (a) Wykazać, że $\lim_{r \rightarrow 1^-} n_f(r) \ln r = 0$.
- (b) Niech $a_1, a_2, \dots$ będą wszystkimi zerami funkcji f (licząc z krotnościami; ciąg ten może być skończony), przy czym $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$. Wykazać, że $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |a_k|) < \infty$.
- (c) Załóżmy, że $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ również jest ograniczoną funkcją holomorficzną oraz że $f(a_k) = g(a_k)$ zachodzi dla każdego $k \in \mathbb{N}$, przy czym $|a_k| < 1$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$, $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ oraz $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |a_k|) = \infty$. Udowodnić, że $f = g$ na $\mathbb{D}$.

Definicja 1. Dla danej funkcji całkowitej f jej rząd (wzrostu) ρ_f definiujemy jako kres dolny tych liczb dodatnich ρ , dla których istnieją stałe A, B , takie że $|f(z)| \leq Ae^{B|z|^\rho}$ na $\mathbb{C}$.

Fakt z wykładu

- (a) Jeśli $\rho_f < \rho$, to $n_f(r) \leq C(1 + r^\rho)$ dla pewnego $C > 0$.
- (b) Jeśli $z_1, z_2, \dots$ to różne od 0 zera funkcji f , to dla każdego $s > \rho$ szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^s}$ jest zbieżny.

6. Wyznaczyć rząd funkcji $f(z) = \sin(\pi z)$. Wyznaczyć też zbiór tych $s > 0$, dla których szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^s}$ jest zbieżny (gdzie z_j to różne od 0 zera funkcji f).

Przypomnijmy oznaczenia z wykładu: $E_0(z) = 1 - z$ oraz, dla $k \geq 1$, $E_k(z) = (1 - z)e^{z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \dots + \frac{1}{k}z^k}$.

Twierdzenie 1 (Twierdzenie Hadamarda o faktoryzacji). Niech a_n będzie ciągiem różnych od 0 zer (licząc z krotnościami) funkcji f rzędu $\rho_f \in [k, k + 1)$. Wówczas

$$f(z) = e^{P(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k(z/a_n),$$

gdzie m to rząd zera w 0, zaś P jest wielomianem stopnia co najwyżej k .

7. Wykazać, że dla każdego $z \in \mathbb{C}$ zachodzą wzory

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad \text{oraz} \quad \sinh(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2}\right).$$