

FAN*

2 grudnia 2025

1. Wykazać, że każda funkcja meromorficzna na $\hat{\mathbb{C}}$ jest wymierna.
2. Udowodnić, że jeśli pierścienie $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < R_1\}$ oraz $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : r_2 < |z| < R_2\}$ są biholomorficzne, to są jednokładne, a jedyne biholomorfizmy między nimi to złożenia sprzężonych inwersji, obrotów i jednokładności o skali $\frac{R_2}{R_1}$. Innymi słowy: jeśli istnieje funkcja biholomorficzna (czyli holomorficzna bijekcja) $f: A_1 \rightarrow A_2$, to $\frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2}$ oraz $f(z) = \frac{R_2}{R_1}cz^\alpha$, gdzie $|c| = 1$ i $\alpha \in \{-1, 1\}$.
3. Wykazać, że funkcja $f(z) = \sqrt{\frac{z}{1-z}} \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{z}{1-z}}$ jest holomorficzna w pewnym otoczeniu 0. Niech $r > 0$ oznacza maksymalny promień, dla którego f jest holomorficzna na $D(0, r)$. Wykazać, że $2z(1-z)f'(z) = f(z) + z$ na $D(0, r)$ oraz że $f(0) = 0$. Wyznaczyć szereg Taylora funkcji f wokół 0 i obliczyć r .
4. Niech $U \subset \mathbb{D}$ będzie obszarem, którego brzeg ma niepustą część wspólną z okręgiem jednostkowym. Niech dalej $V = \{\bar{z}^{-1} : z \in U\}$. Załóżmy, że funkcja $f: U \cup (\partial U \cap \partial \mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ jest ciągła oraz że $f \not\equiv 0$, $f \in \mathbb{H}(U)$ i $f(\partial U \cap \partial \mathbb{D}) \subset \partial \mathbb{D}$. Określmy funkcję $F: U \cup V \cup (\partial U \cap \partial V) \rightarrow \mathbb{C}$ wzorem

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{if } z \in \overline{\mathbb{D}}, \\ \left(\overline{f(\bar{z}^{-1})}\right)^{-1} & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wykazać, że F jest meromorficzna na $U \cup V \cup (\partial U \cap \partial V)$ oraz holomorficzna na $U \cup \{\bar{z}^{-1} : z \in U, f(z) \neq 0\} \cup (\partial U \cap \partial V)$.

5. Załóżmy, że $f: \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$ jest funkcją ciągłą na $\overline{\mathbb{D}}$, holomorficzną na $\mathbb{D}$ oraz że $f(\partial \mathbb{D}) \subset \partial \mathbb{D}$. Udowodnić, że:

- f jest funkcją wymierną;
- f ma miejsce zerowe w $\mathbb{D}$ lub f jest stała;
- jeśli f nie zeruje się na $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, to jest wielomianem.

6. Zrobić Zadanie o biholomorficzności pierścieni, używając zasady symetrii:

Wykazać, że jeśli pierścienie $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < R_1\}$ oraz $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : r_2 < |z| < R_2\}$ są biholomorficzne, to są jednokładne, a jedyne biholomorfizmy między nimi to złożenia sprzężonych inwersji, obrotów i jednokładności o skali $\frac{R_2}{R_1}$. Innymi słowy: jeśli istnieje funkcja biholomorficzna (czyli holomorficzna bijekcja) $f: A_1 \rightarrow A_2$, to $\frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2}$ oraz $f(z) = \frac{R_2}{R_1}cz^\alpha$, gdzie $|c| = 1$ i $\alpha \in \{-1, 1\}$.