

FAN*

25 listopada 2025

1. Obliczyć residua funkcji f w każdym z jej (skończonych) punktów osobliwych dla:

$$(a) f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}; \quad (b) f(z) = \sin z \cos \frac{1}{z}.$$

Dla funkcji f holomorficznej w $\{z \in \mathbb{C}: |z| > R_0\}$ wartość całki

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,R)} f(z) dz$$

nie zależy od $R > R_0$. Wartość tę nazywamy residuum funkcji f w nieskończoności i oznaczamy ją $\text{res}(f, \infty)$.

2 (Fakt 2). Załóżmy, że zbiór $A \subset \mathbb{C}$ jest skończony, zaś funkcja f jest holomorficzna w $\mathbb{C} \setminus A$. Niech $B = A \cup \{\infty\}$. Wykazać, że

$$\sum_{b \in B} \text{res}(b, f) = 0.$$

3 (Fakt 1). Wykazać, że jeśli f jest holomorficzna w $\{z \in \mathbb{C}: |z| > R_0\}$, to

$$-\text{res}(\infty, f) = \text{res}\left(0, f(z^{-1})z^{-2}\right).$$

4. Niech $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ w $\{z: |z| > R_0\}$. Udowodnić, że $\text{res}(\infty, f) = -c_{-1}$.

5. Obliczyć

$$\int_{C(0,2)} \frac{dz}{z^3(z^{10} - 2)} \quad \text{oraz} \quad \int_{C(0,2)} \frac{z^{19}}{z^{10} - 2} dz.$$

6. Dana jest funkcja meromorficzna $f: \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ o skończonej liczbie biegunów $a_1, \dots, a_m$, przy czym $a_1, \dots, a_m \notin \mathbb{Z}$. Wykazać, że jeśli $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$, to

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N f(n) = - \sum_{k=1}^m \text{res}\left(a_k, \pi f(z) \text{ctg}(\pi z)\right).$$

7. Obliczyć

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 1}.$$

8. Wykazać, że jeśli pierścienie $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < R_1\}$ oraz $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : r_2 < |z| < R_2\}$ są biholomorficzne, to są jednokładne, a jedyne biholomorfizmy między nimi to złożenia sprzężonych inwersji, obrotów i jednokładności o skali $\frac{R_2}{R_1}$. Innymi słowy: jeśli istnieje funkcja biholomorficzna (czyli holomorficzna bijekcja) $f: A_1 \rightarrow A_2$, to $\frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2}$ oraz $f(z) = \frac{R_2}{R_1} cz^\alpha$, gdzie $|c| = 1$ i $\alpha \in \{-1, 1\}$.