

FAN*

18 listopada 2025

1. Wykazać, że nie istnieje funkcja całkowita f spełniająca

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$$

dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$.

2. Dane są $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ oraz funkcja f holomorphyzna w $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$. Wykazać równoważność poniższych warunków:

- (i) istnieją $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ takie, że $c_m \neq 0$ oraz $f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-z_0)^k}$ ma osobliwość usuwalną w z_0 ,
- (ii) $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)(z-z_0)^{m-1}| = \infty$ i istnieje (skończona) granica $f(z)(z-z_0)^m$ przy z zbiegającym do z_0 .

3. Wyznaczyć wszystkie (izolowane) punkty osobliwe funkcji $f(z) = \frac{e^z(z+2)}{(z^2+1)^3(z^2-4)}$. Dla każdego z nich określić, jakiego jest typu (osobliwość pozorna/biegun/osobliwość istotna).

4. Wyznaczyć wszystkie szeregi Laurenta wokół 0 funkcji $f(z) = \frac{1}{z(1-z)^2}$. Wyznaczyć wszystkie szeregi Laurenta wokół 1 funkcji f .

5. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech $f_n(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(n)} z^k$ w pierścieniu $A = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$. Wykazać, że jeśli $f_n \rightarrow f$ niemal jednostajnie na A , to $\lim_{n \rightarrow \infty} c_k^{(n)} =: c_k$ istnieje dla każdego k oraz zachodzi $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ na A .

6. Niech $0 \leq r_1 < R_1 \leq \infty$, $0 \leq r_2 < R_2 \leq \infty$, $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k$ na $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < R_1\}$ oraz $g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ na $\{z \in \mathbb{C} : r_2 < |z| < R_2\}$. Wykazać, że jeśli dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ szereg $\sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l c_{k-l} =: a_k$ jest zbieżny, to $f(z)g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ na $\{z \in \mathbb{C} : \max\{r_1, r_2\} < |z| < \min\{R_1, R_2\}\}$.

Czy to prawda, że (przy warunkach z pierwszego zdania) szereg $\sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l c_{k-l}$ musi być zbieżny dla każdego $k \in \mathbb{Z}$?

7. Obliczyć residua funkcji f w każdym z jej (skończonych) punktów osobliwych dla:

$$(a) f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}; \quad (b) f(z) = \sin z \cos \frac{1}{z}.$$

Dla funkcji f holomorficznej w $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R_0\}$ wartość całki

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,R)} f(z) dz$$

nie zależy od $R > R_0$. Wartość tę nazywamy residuum funkcji f w nieskończoności i oznaczamy ją $\text{res}(f, \infty)$.

8 (Fakt 2). Załóżmy, że zbiór $A \subset \mathbb{C}$ jest skończony, zaś funkcja f jest holomorficzna w $\mathbb{C} \setminus A$. Niech $B = A \cup \{\infty\}$. Wykazać, że

$$\sum_{b \in B} \text{res}(b, f) = 0.$$

9 (Fakt 1). Wykazać, że jeśli f jest holomorficzna w $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R_0\}$, to

$$-\text{res}(\infty, f) = \text{res}\left(0, f(z^{-1})z^{-2}\right).$$

10. Niech $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ w $\{z : |z| > R_0\}$. Udowodnić, że $\text{res}(\infty, f) = -c_{-1}$.

11. Obliczyć

$$\int_{C(0,2)} \frac{dz}{z^3(z^{10} - 2)} \quad \text{oraz} \quad \int_{C(0,2)} \frac{z^{19}}{z^{10} - 2} dz.$$