

FAN*

14 listopada 2025

1. Załóżmy, że $f: R \rightarrow \mathbb{C}$ jest holomorficzną w $R = \{z \in \mathbb{C}: 1 < |z| < 2\}$ i ciągłą w $\overline{R}$, a także że zachodzą nierówności:

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{dla } |z| = 1 \quad \text{oraz} \quad |f(z)| \leq 4 \quad \text{dla } |z| = 2.$$

Wykazać, że $|f(z)| \leq |z|^2$ na R .

2. Dana jest funkcja holomorficzna $f: \{z \in \mathbb{C}: |z| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$. Dla $0 \leq r < R$ niech $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Wykazać, że funkcja M jest ściśle rosnąca na $[0, R)$ lub f jest stała.

3 (Twierdzenie Hadamarda o trzech okręgach – wersja słabsza dla funkcji bez zer). Dana jest funkcja holomorficzna $f: A \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, gdzie A jest pierścieniem $\{z \in \mathbb{C}: R_1 < |z| < R_2\}$. Niech $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ dla $r \in (R_1, R_2)$. Wykazać, że funkcja $r \mapsto \ln(M(e^r))$ jest wypukła na $(\ln R_1, \ln R_2)$.

Uwaga: w pracy domowej znajduje się podobne zadanie (dodatkowe), z pominiętym założeniem o tym, że f się nie zeruje – z terminem oddania 2 XII.

4. Załóżmy, że $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ jest holomorficzną na ograniczonym obszarze U i ciągłą w $\overline{U}$. Wykazać, że jeśli $|f|$ jest stała na ∂U , to f jest stała lub ma zero w U .

Twierdzenie 1 (Lemat Schwarza). Jeśli $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ jest holomorficzną i $f(0) = 0$, to

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{dla wszystkich } z \in \mathbb{D}.$$

Wobec tego, jeśli $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ jest holomorficzną, $g(0) = 0$ i $|g| \leq M$ na $\mathbb{D}$, to

$$|g(z)| \leq M|z| \quad \text{dla wszystkich } z \in \mathbb{D}.$$

Twierdzenie 2 (Lemat Schwarza-Picka). Jeśli $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ jest holomorficzną, to

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)}f(z_2)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}z_2} \right| \quad \text{dla wszystkich } z_1, z_2 \in \mathbb{D}.$$

Wobec tego, jeśli $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ jest holomorficzną, $g(z_1) = 0$ i $|g| \leq M$ na $\mathbb{D}$, to

$$|g(z)| \leq M \left| \frac{z - z_1}{1 - \overline{z_1}z} \right| \quad \text{dla wszystkich } z \in \mathbb{D}.$$

5. Załóżmy, że $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ jest holomorficzną. Niech $z_1, \dots, z_n$ będą pewnymi zerami f (licząc z krotnościami). Załóżmy, że $|f| \leq M$ na $\mathbb{D}$. Wykazać, że dla każdego $z \in \mathbb{D}$ zachodzi

$$|f(z)| \leq M \left| \frac{z - z_1}{1 - \overline{z_1}z} \cdot \dots \cdot \frac{z - z_n}{1 - \overline{z_n}z} \right|.$$

6. Wykazać, że nie istnieje funkcja całkowita f spełniająca

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$$

dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$.

7. Dane są $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ oraz funkcja f holomorficzna w $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$. Wykazać równoważność poniższych warunków:

- (i) istnieją $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ takie, że $c_m \neq 0$ oraz $f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-z_0)^k}$ ma osobliwość usuwalną w z_0 ,
- (ii) $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)(z - z_0)^{m-1}| = \infty$ i istnieje (skończona) niezerowa granica $f(z)(z - z_0)^m$ przy z zbiegającym do z_0 .

8. Wyznaczyć wszystkie (izolowane) punkty osobliwe funkcji $f(z) = \frac{e^z(z+2)}{(z^2+1)^3(z^2-4)}$. Dla każdego z nich określić, jakiego jest typu (osobliwość pozorna/biegun/osobliwość istotna).

9. Wyznaczyć wszystkie szeregi Laurenta wokół 0 funkcji $f(z) = \frac{1}{z(1-z)^2}$. Wyznaczyć wszystkie szeregi Laurenta wokół 1 funkcji f .

10 (Do pomyślenia na następne ćwiczenia).

- (a) Czy istnieje funkcja holomorficzna $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} \rightarrow \mathbb{C}$, która w każdym z punktów $z = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ ma biegun?
- (b) Czy istnieje funkcja holomorficzna $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} \rightarrow \mathbb{C}$, która w każdym z punktów $z = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ ma osobliwość istotną?
- (c) Czy istnieje funkcja holomorficzna $f : \mathbb{C} \setminus \{1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \mathbb{C}$, która dla każdego $n \in \mathbb{N}$ ma biegun rzędu n w punkcie $z = n$?