

FAN*

4 listopada 2025

Twierdzenie 1 (Wzór całkowy Cauchy'ego). Załóżmy, że $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ jest holomorficzna oraz że D jest takim obszarem jednospójnym, że $\overline{D} \subset U$ i $C = \partial D$ jest krzywą Jordana z dodatnią orientacją. Wtedy dla wszystkich $z_0 \in D$ zachodzi

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Co więcej, jeśli $n \in \mathbb{N}$, to $f^{(n)}$ istnieje w U i dla każdego $z_0 \in D$ zachodzi

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

1. Obliczyć:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_{\{|z|=1\}} \frac{e^z}{z} dz, & \text{(b)} \quad & \int_{\{|z|=1\}} \frac{\cos z}{z^n} dz, \\ \text{(c)} \quad & \int_{\{|z|=3\}} \frac{\sin z}{z^2 - 2z} dz, & \text{(d)} \quad & \int_{\{|z|=1\}} \frac{\sin z}{z^2 - 2z} dz. \end{aligned}$$

2. Dana jest funkcja całkowita f . Obliczyć

$$\int_{S(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz,$$

gdzie $a, b \in D(0, R)$ są różne.

Wywnioskować twierdzenie Liouville'a: ograniczona funkcja całkowita jest stała.

3. Załóżmy, że $a, b > 0$ oraz f jest taką funkcją całkowitą, że $f(z+a) = f(z)$ oraz $f(z+bi) = f(z)$ dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$. Wykazać, że f jest stała.

4. Obliczyć:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin t} dt & \text{(b)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx, \\ \text{(c)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx, & \text{(d)} \quad & \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx \quad \text{oraz} \quad \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx. \end{aligned}$$

5. Załóżmy, że $f : R \rightarrow \mathbb{C}$ jest holomorficzna w $R = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ i ciągła w $\overline{R}$, a także że zachodzą nierówności:

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{dla } |z| = 1 \quad \text{oraz} \quad |f(z)| \leq 4 \quad \text{dla } |z| = 2.$$

Wykazać, że $|f(z)| \leq |z|^2$ na R .

6. Dana jest funkcja holomorphiczna $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$. Dla $0 \leq r < R$ niech $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Wykazać, że funkcja M jest ściśle rosnąca na $[0, R)$ lub f jest stała.

7 (Twierdzenie Hadamarda o trzech okręgach – wersja słabsza dla funkcji bez zer). Dana jest funkcja holomorphiczna $f : A \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, gdzie A jest pierścieniem $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$. Niech $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ dla $r \in (R_1, R_2)$. Wykazać, że funkcja $r \mapsto \ln(M(e^r))$ jest wypukła na $(\ln R_1, \ln R_2)$.

8. Załóżmy, że $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ jest holomorphiczna na ograniczonym obszarze U i ciągła w $\overline{U}$. Wykazać, że jeśli $|f|$ jest stała na ∂U , to f jest stała lub ma zero w U .