

FAN*

28 października 2025

1. Załóżmy, że funkcja $f: U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest holomorficzna na obszarze jednospójnym U . Ustalmy $a \in D$ oraz $A \in \mathbb{C}$, takie że $e^A = f(a)$. Wykazać, że całka

$$I(z) = \int_a^z \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi + A$$

nie zależy od drogi łączącej a z $z \in U$ zawartej w U . Wykazać, że I jest holomorficzną gałęzią logarytmu funkcji f w obszarze U .

2. Niech U będzie obszarem w $\mathbb{R}^n$. Załóżmy, że $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją klasy $C^2(U)$ spełniającą $\Delta g \geq 0$. Wykazać, że

$$\frac{1}{|\partial B(x_0, r)|} \int_{\partial B(x_0, r)} g(u) d\sigma_{\partial B(x_0, r)}(u) \geq g(x_0)$$

dla każdego $x_0 \in U$ i $r > 0$ takich że $\overline{B(x_0, r)} \subset U$.

Co jeśli zamiast uśredniać po sferach będziemy uśredniać po kulach o środku w x_0 ?

3. Załóżmy, że U jest obszarem w $\mathbb{R}^n$, a funkcja $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy $C^2(U)$ i spełnia $\Delta f \geq 0$. Wykazać, że jeśli dla pewnego $z_0 \in U$ nierówność $f(z) \leq f(z_0)$ zachodzi dla każdego $z \in U$, to f jest stała na U .

4. Wyznaczyć wszystkie funkcje harmoniczne $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, które są stałe na okręgach o środku w zerze. Wyznaczyć wszystkie funkcje harmoniczne $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, które są stałe na okręgach o środku w zerze.

5. Niech $U = \mathbb{C} \setminus \{0\} \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} = V$ oraz $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ dla wszystkich $(x, y) \in V$.

(a) Wykazać, że u jest harmoniczna.

(b) Załóżmy, że $v: V \rightarrow \mathbb{R}$ jest taka, że $u + iv$ jest holomorficzną na U . Wykazać, że $\frac{\partial}{\partial t}(v(\sin t, \cos t)) = -2$.

(c) Wykazać, że nie istnieje taka funkcja $v: V \rightarrow \mathbb{R}$, że funkcja $u + iv$ jest holomorficzną na U .

Definicja 1. Dla parametryzacji $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ kawałkami klasy C^1 krzywej γ definiujemy długość krzywej γ wzorem

$$\int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

6. Dana jest krzywa γ długości L , której obraz γ^* zawarty jest w obszarze U oraz funkcja $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ spełniająca $|f| \leq M$ na γ^* . Wykazać, że

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq ML.$$

Czy nierówność

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| dz$$

jest prawdziwa?

7. Załóżmy, że f jest funkcją całkowitą (tj. f jest holomorficzną na $\mathbb{C}$). Czy to prawda, że dla każdego $z, w \in \mathbb{C}$ istnieje $\xi \in \mathbb{C}$, takie że $f(z) - f(w) = f'(\xi)(z - w)$?

8. Załóżmy, że $f \in H(\mathbb{D})$ (tj. f jest holomorficzną na $\mathbb{D}$). Wykazać, że dla wszystkich $z, w \in \mathbb{C}$ zachodzi

$$|f(z) - f(w)| \leq |z - w| \sup_{\xi \in [z, w]} |f'(\xi)|.$$

Twierdzenie 1 (Wzór całkowy Cauchy'ego). Załóżmy, że $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ jest holomorficzną oraz że D jest takim obszarem jednospójnym, że $\overline{D} \subset U$ i $C = \partial D$ jest krzywą Jordana z dodatnią orientacją. Wtedy dla wszystkich $z_0 \in D$ zachodzi

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Co więcej, jeśli $n \in \mathbb{N}$, to $f^{(n)}$ istnieje w U i dla każdego $z_0 \in D$ zachodzi

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

9. Obliczyć:

$$(a) \int_{\{|z|=1\}} \frac{e^z}{z} dz, \quad (b) \int_{\{|z|=1\}} \frac{\cos z}{z^2} dz, \quad (c) \int_{\{|z|=3\}} \frac{\sin z}{z^2 - 2z} dz.$$