

FAN*

21 października 2025

1. Wykazać, że homografie zachowują dwustosunek $(z_1; z_2; z_3; z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$.
2. Załóżmy, że z_1, z_2, z_3 są parami różne oraz że w_1, w_2, w_3 są parami różne. Wykazać, że homografia $f(z)$ przekształcająca z_1, z_2, z_3 na w_1, w_2, w_3 (odpowiednio) zadana jest równaniem

$$(w_1; w_2; w_3; f(z)) = (z_1; z_2; z_3; z).$$

3. Uzasadnić, że dwustosunek $(z_1; z_2; z_3; z_4)$ jest liczbą rzeczywistą wtedy i tylko wtedy gdy z_1, z_2, z_3, z_4 leżą na jednym okręgu uogólnionym.
4. Wyznaczyć homografię f , dla której $f(\infty) = 1$, $f(0) = -1$ i $f(i) = 0$. Wykazać, że f przekształca górną półpłaszczyznę $\mathbb{H}$ na otwarty dysk jednostkowy $\mathbb{D}$.
5. Niech $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Wykazać, że f przekształca bijektywnie górne (otwarte) półkole $\mathbb{D} \cap \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ na dolną półpłaszczyznę $\mathbb{H}$.
6. Wyznaczyć wszystkie punkty z , w których dana funkcja ma pochodną zespoloną:

$$(a) f(z) = |z|, \quad (b) f(z) = \bar{z}, \quad (c) f(z) = \frac{1}{z}.$$

7. Obliczyć całki $\int_{[0, \pi - i\pi]} e^{\bar{z}} dz$, $\int_{\gamma} |z|^n dz$, gdzie $\gamma = \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ z orientacją od 1 do -1 oraz całkę $\int_{\eta} |z|^n dz$, gdzie $\eta = \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \leq 0\}$ z orientacją od -1 do 1. Czy $z \mapsto |z|^n$ jest holomorficzna w dysku jednostkowym $\mathbb{D}$?
8. Podać przykład punktów $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, takich że $z_1 z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ oraz $\operatorname{Log}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2)$.
9. Załóżmy, że funkcja $f: U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest holomorficzna na obszarze jednospójnym U . Ustalmy $a \in U$ oraz $A \in \mathbb{C}$, takie że $e^A = f(a)$. Wykazać, że całka

$$I(z) = \int_a^z \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi + A$$

nie zależy od drogi łączącej a z $z \in U$ zawartej w U . Wykazać, że I jest holomorficzną gałęzią logarytmu funkcji f w obszarze U .

10. Wykazać, że nie istnieje gałąź logarytmu na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, to znaczy nie istnieje funkcja holomorficzna $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ spełniająca $e^{f(z)} = z$ dla wszystkich punktów $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.