

FAN*

14 października 2025

1. Uzasadnić, że każda homografia jest złożeniem przesunięć $z \mapsto z + a$, jedno-
kładności złożonych z obrotem $z \mapsto az$ ($a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) i inwersji (sprzężonych)
 $z \mapsto z^{-1}$.

2. Uzasadnić, że każda homografia jest bijekcją $\hat{\mathbb{C}}$.

3. Niech $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Wykazać, że f przekształca bijectywnie górne (otwarte)
półkole $\mathbb{D} \cap \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ na dolną półpłaszczyznę $\mathbb{H}$.

4. Uzasadnić, że homografia przekształca okręgi uogólnione na okręgi uogólnione.

5. Wykazać, że homografie zachowujące dysk jednostkowy $\mathbb{D}$ są postaci

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad \text{gdzie } \theta = \arg(f'(0)) \text{ i } a = f^{-1}(0).$$

Uzasadnić, że tę rodzinę przekształceń można równoważnie zapisać w postaci
 $f(z) = \frac{az+b}{bz+\bar{a}}$, gdzie $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

6. Wykazać, że homografie zachowują dwustosunek $(z_1; z_2; z_3; z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$.

7. Załóżmy, że z_1, z_2, z_3 są parami różne oraz że w_1, w_2, w_3 są parami różne. Wy-
kazać, że homografia $f(z)$ przekształcająca z_1, z_2, z_3 na w_1, w_2, w_3 (odpowiednio)
zadana jest równaniem

$$(w_1; w_2; w_3; f(z)) = (z_1; z_2; z_3; z).$$

8. Uzasadnić, że dwustosunek $(z_1; z_2; z_3; z_4)$ jest liczbą rzeczywistą wtedy i tylko
wtedy gdy z_1, z_2, z_3, z_4 leżą na jednym okręgu uogólnionym.

9. Wyznaczyć homografię f , dla której $f(\infty) = 1$, $f(0) = -1$ i $f(i) = 0$. Wykazać,
że f przekształca górną półpłaszczyznę $\mathbb{H}$ na otwarty dysk jednostkowy $\mathbb{D}$.

10. Wyznaczyć wszystkie punkty z , w których dana funkcja ma pochodną zespo-
loną:

$$(a) f(z) = |z|, \quad (b) f(z) = \bar{z}, \quad (c) f(z) = \frac{1}{z}.$$