

FAN*

7 października 2025

1. Wykazać, że $x, y, z \in \mathbb{C}$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx.$$

2. Udowodnić, że pierwiastki wielomianu zespolonego P stopnia co najmniej dwa oraz pierwiastki wielomianu P' mają ten sam środek ciężkości (czyli średnią arytmetyczną).

3. Czy istnieje wielomian o współczynnikach rzeczywistych $P(x, y)$, którego obrazem jest $(0, \infty)$?

Od teraz, gdy mówimy o wielomianie, mamy na myśli wielomian z $\mathbb{C}$ w $\mathbb{C}$ o współczynnikach zespolonych.

4. Załóżmy, że P jest wielomianem i niech $f(z) = \bar{z}$. Wykazać, że

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{it}) - P(e^{it})|^2 dt \geq 2\pi.$$

Uzasadnić, że f nie można przybliżać jednostajnie wielomianami na okręgu jednostkowym $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

5. Dane są liczby dodatnie $c_1, \dots, c_n$ spełniające $c_1 + \dots + c_n \leq 1$. Wykazać, że wszystkie pierwiastki wielomianu $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ są zawarte w dysku $\{|z| \leq R\}$, gdzie

$$R = \max \left(\frac{|a_1|}{c_1}, \sqrt{\frac{|a_2|}{c_2}}, \dots, \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{c_n}} \right).$$

W szczególności są one zawarte w dysku $\{|z| \leq \tilde{R}\}$, gdzie $\tilde{R} = 2 \max_{k=1, \dots, n} \sqrt[k]{|a_k|}$.

6. Załóżmy że $a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_n > 0$. Udowodnić, że wielomian $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ nie ma pierwiastków w dysku jednostkowym $\mathbb{D} = \{|z| \leq 1\}$.

7. Dany jest wielomian zespolony $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ stopnia n . Wykazać, że

$$\max_{|z|=1} |P(z)| \geq |a_0| + |a_n|.$$

8. Niech $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ i $n \in \mathbb{N}$. Wyznaczyć

$$\min_{z_1, \dots, z_n \in \mathbb{T}} \max_{z \in \mathbb{T}} \prod_{k=1}^n |z - z_k|.$$

9. Dane są $a \in \mathbb{C} \setminus \partial\mathbb{D}$ oraz $B(z) = e^{i\theta \frac{z-a}{1-\bar{a}z}}$. Wykazać, że:

- (a) $(|z| - 1)(|a| - 1) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|B(z)| < 1$,
- (b) $(|z| - 1)(|a| - 1) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|B(z)| = 1$,
- (c) $(|z| - 1)(|a| - 1) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|B(z)| > 1$.

10. Dany jest wielomian zespolony P . Wykazać, że istnieje wielomian zespolony Q , taki że $|P(z)| = |Q(z)|$ dla każdego $|z| = 1$ oraz Q nie ma pierwiastków w $\{|z| < 1\}$.

11. Dane są wielomian P stopnia n , oraz $a \neq b$ takie, że $P(a) \neq P(b)$. Niech $C_{a,b}$ będzie zbiorem wszystkich liczb zespolonych, z których odcinek $[a, b]$ widać pod kątem co najmniej π/n (brzeg tego zbioru składa się z dwóch łuków). Wykazać, że $[P(a), P(b)] \subseteq P(C_{a,b})$.