AM I.2

V seria zadań domowych

do oddania na początku ćwiczeń 16 kwietnia

1. Wykazać, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2(x)}{x^{\sqrt{n}}}$$

jest zbieżny punktowo na $[1, \infty)$. Następnie udowodnić, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2(x)}{x^{\sqrt{n}}}$$

jest ciągła na $(1, \infty)$, ale nie jest prawostronnie ciągła w $x = 1$. Czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2(x)}{x^{\sqrt{n}}}$$

jest zbieżny jednostajnie na $[1, \infty)$?

2 (Każdy szereg wart jest $\frac{1}{2}$ punktu)**.** Czy szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1-x)x^n}{1-x^{2n}}$$

są zbieżne jednostajnie na $(0, 1)$? Czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n.$$

jest jednostajnie zbieżny na $(-1, 1)$? Każdą odpowiedź – jak zawsze – należy dokładnie uzasadnić.

3. Wykazać następującą funkcyjną wersję kryterium Cauchy'ego:

> Dany jest zbiór $A \subset \mathbb{R}$ i ciąg funkcji $f_n \colon A \to [0, \infty)$ $(n \in \mathbb{N})$. Załóżmy, że ciąg $\left(\sqrt[n]{f_n} \right)_{n \geqslant 1}$ jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji $g \colon A \to [0, \infty)$, takiej że $\sup_{x \in A} g(x) < 1$. Wówczas szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie.

4. Dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ i $N \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy

$$f(x) = \pi \operatorname{ctg}(\pi x), \qquad g(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right).$$

(a) [podpunkt wart $\frac{1}{3}$ punktu] Udowdonić, że funkcje f i g są dobrze określone i ciągłe na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(b) [podpunkt wart $\frac{1}{3}$ punktu] Wykazać, że funkcje f i g są nieparzyste oraz 1-okresowe (to znaczy, że $-f(-x) = f(x) = f(x+1)$ i $-g(-x) = g(x) = g(x+1)$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$).

(c) [podpunkt wart $\frac{1}{3}$ punktu] Dowieść, że funkcje f i g spełniają to samo równanie funkcyjne:

$$f\Big(\frac{x}{2}\Big) + f\Big(\frac{x+1}{2}\Big) = 2f(x),$$
$$g\Big(\frac{x}{2}\Big) + g\Big(\frac{x+1}{2}\Big) = 2g(x).$$

(d) [podpunkt wart $\frac{1}{4}$ punktu] Udowodnić, że funkcja zadana przez

$$h(x) = f(x) - g(x) = \pi \operatorname{ctg}(\pi x) - \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\Big) \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$$

oraz $h(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{Z}$ jest ciągła na całym $\mathbb{R}$ i ma własności opisane w punkach (b)–(c).

(e) [podpunkt wart $\frac{1}{4}$ punktu] Korzystając z wykazanych w (d) własności funkcji h, wykazać, że jest ona tożsamościwo równa zero. Wywnioskować stąd wzór

$$\pi \operatorname{ctg}(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\Big).$$

5 (Zadanie dodatkowe, warte 1 dodatkowy punkt. Rozwiązania tego zadania proszę oddawać na oddzielnej kartce. **Termin oddania: 30 kwietnia**).
Ustalmy $\alpha \in (0,1)$. Dla $x \in [0,1]$ definiujemy

$$f(x) = 1 - 2\Big|x - \frac{1}{2}\Big|.$$

Funkcje $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane są wzorami $f_0(x) = f(x - \lfloor x \rfloor) = f(\{x\})$ oraz $f_k(x) = 2^{-\alpha k} f_0(2^k x)$ dla $k = 1, 2, \ldots$.

Uzasadnić, że szereg $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$ do pewnej funkcji ciągłej F. Udowodnić, że F jest hölderowsko ciągła z wykładnikiem α na $\mathbb{R}$, ale nie jest hölderowsko ciągła z żadnym wykładnikiem $\beta \in (\alpha, 1]$ na żadnym przedziale $(a,b) \subset \mathbb{R}$.