AM I.2

IV seria zadań domowych

do oddania na początku ćwiczeń 9 kwietnia

1. Zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu:

(a) $f_n(x) = n\Big(\sqrt{x + n^{-3/2}} - \sqrt{x}\Big)$ na $(0, \infty)$;
(b) $g_n(x) = x \operatorname{arc\,tg}(nx)$ na $(0, \infty)$.

Podać funkcję graniczną, jeśli dany ciąg jest zbieżny.

2. Zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu $f_n(x) = \ln(e^{-nx} + e^x)$ na przedziałach $(0, 1]$, $[1/2, 2]$ i $[1, \infty)$. Podać funkcję graniczną, jeśli ciąg jest zbieżny na danym przedziale.

3. Zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu $f_n(x) = (x^n - \sin(x^n))^{1/n}$ na przedziałach $[0, 1]$ oraz $[1/100, 1]$. Podać funkcję graniczną, jeśli ciąg jest zbieżny na danym przedziale.

4. Funkcje $f_n\colon A \to \mathbb{R}$ są jednostajnie zbieżne do funkcji $f\colon A \to \mathbb{R}$ (tu A to niepusty podzbiór $\mathbb{R}$). Funkcja $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła. Wykazać, że $\varphi \circ f_n \rightrightarrows \varphi \circ f$.

5. Dane są funkcje $f_n\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

(i) $f_n \rightrightarrows 0$.
(ii) Dla każdego zbieżnego ciągu $(x_n)_{n\geqslant 1}$ punktów przedziału $[a, b]$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = 0$.

6 (Zadanie dodatkowe, warte jeden dodatkowy punkt. W pierwszym podejściu nikt nie zdobył za nie dodatniej liczby punktów. Proszę oddawać rozwiązania tego zadania na osobnej kartce.)**.** Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest klasy C^∞ (to znaczy dla dowolnego k naturalnego f jest różniczkowalna k-krotnie) i spełnia $f(1/n) = n^2/(n^2 + 1)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Obliczyć $f(0)$ oraz $f^{(k)}(0)$ dla wszystkich k naturalnych.