AM I.2

III seria zadań domowych

do oddania na początku ćwiczeń 22 marca

1 (Każdy podpunkt jest wart 1/2 punktu)**.** Obliczyć granice:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - \operatorname{arc\,tg}(x)}{x^3}, \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin(x)) - \sin(\operatorname{tg}(x))}{x^7},$$

$$\text{c)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{e^{x^2}} + e^{x^2} - 2\cos(x)\right)\sin(\sqrt{\pi^2 + x^2})}{(\arcsin(x) - x)\ln(1+x)}, \qquad \text{d)}\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - \sqrt{\cos(2x)}}{x^2 \ln(\cos(x))}.$$

2. Niech $f(x) = \sin\Big(\ln(1+x\sqrt{2})\Big) - \sqrt{2}\operatorname{tg}(x)$ dla $x \geqslant 0$. Znaleźć asymptotę (ukośną) w nieskończoności funkcji $g(x) = x^3 f(1/x)$.

3. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest klasy C^∞ (to znaczy dla dowolnego k naturalnego f jest różniczkowalna k-krotnie) i spełnia $f(1/n) = n^2/(n^2+1)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Obliczyć $f(0)$ oraz $f^{(k)}(0)$ dla wszystkich k naturalnych.

4. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których zachodzi:

$$(1-a)\sin(x) + a\operatorname{tg}(x) \geqslant x \qquad \text{dla wszystkich } x \in [0, \pi/2).$$