AM I.2

II seria zadań domowych

do oddania na początku ćwiczeń 15 marca

1. Wykazać, że dla dowolnych $\varepsilon \in [0,1]$ oraz $p \in [2,3]$ zachodzi nierówność
$$(1+\varepsilon)^p - (1-\varepsilon)^p \leqslant 2p\varepsilon(1+\varepsilon^2).$$
2. a) Funkcja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $g(x) = ax^2 + bx + c$ spełnia
$$g(0) = g(1) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad g''(x) = 1 \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}.$$
Znaleźć a, b, c oraz udowodnić, że $g(x) \geqslant -\frac{1}{8}$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

b) Dwukrotnie różniczkowalna funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunki
$$f(0) = f(1) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad f''(x) \leqslant 1 \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}.$$
Dowieść, że dla dowolnej liczby $x \in [0,1]$ zachodzi $f(x) \geqslant -\frac{1}{8}$.

3. Dany jest parametr $a > 0$. Zbadać przebieg zmienności funkcji $f\colon (a,\infty) \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem
$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-a}}.$$
(Należy zbadać, na jakich przedziałach funkcja jest rosnąca/malejąca/stała, na jakich przedziałach jest wypukła/wklęsła/liniowa, wyznaczyć asymptoty funkcji w a i w nieskończoności – lub wykazać, że asymptoty nie istnieją – oraz naszkicować wykres funkcji.)

4. a) Czy z istnienia granic $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ i $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ wynika ich równość?

b) Podać przykład funkcji różniczkowalnej $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, dla której istnieje granica $\lim_{x\to\infty} f'(x)$, ale która nie ma asymptoty ukośnej w nieskończoności.

c) Podać przykład funkcji różniczkowalnej $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, która ma asymptotę ukośną w nieskończoności, ale dla której nie istnieje granica $\lim_{x\to\infty} f'(x)$.

Uwaga: należy uzasadnić, że wskazane w rozwiązaniu przykłady spełniają podane warunki.

5. Obliczyć granice
$$\text{a)}\ \lim_{x\to\pi/4} \operatorname{tg}(x)^{\operatorname{tg}(2x)}, \qquad \text{b)}$$
$$\text{c)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin^4(x)\ln(1+x)}{\cos(x)x^3(e^x-1)^2}.$$
6 (Zadanie za dodatkowy punkt, do oddania na osobnej kartce.)**.** Niech $(q_n)_n$ będzie ciągiem wszystkich liczb wymiernych z przedziału $(0,1)$ (każda liczba wymierna z $(0,1)$ występuje w tym ciągu dokładnie raz). Uzasadnić, że dla każdego

$x \in (0,1)$ szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x-q_k|}{10^k}$ jest zbieżny.
Połóżmy $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x-q_k|}{10^k}$. Wykazać, że f jest wypukła na $(0,1)$, różniczkowalna we wszystkich punktach niewymiernych z przedziału $(0,1)$ i nieróżniczkowalna we wszystkich punktach wymiernych z przedziału $(0,1)$.