AM I.2

I seria zadań domowych

do oddania na początku piątkowych ćwiczeń 8 marca

1. a) Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie a. Ciągi (x_n) i (y_n) są zbieżne do a i spełniają $x_n > a > y_n$. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(a).$$

b) Czy teza pozostaje w mocy jeśli zamienimy założenie na $x_n > y_n > a$?

2. Wykazać, że jeśli f jest różniczkowalna w punkcie p oraz $f'(p) > 0$, to istnieje $\varepsilon > 0$, taki że jeśli $p - \varepsilon < x < p < y < p + \varepsilon$, to $f(x) < f(p) < f(y)$.
Uwaga: z założenia $f'(p) > 0$ nie wynika, że f jest rosnąca w otoczeniu p.

3 (Każdy podpunkt wart jest pół punktu)**.** Wykazać, że

a) jeśli $e \leqslant x < y$, to $y^x < x^y$. Wywnioskować stąd, że $e^\pi > \pi^e$;
b) jeśli $t \in (0,1)$, to $t \leqslant \exp(1 - \exp(1-t))$,
c) jeśli $x \geqslant 0$, to $\ln(1+x) \leqslant \frac{x}{\sqrt{1+x}}$.

4. Funkcja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[0,1]$ i różniczkowalna na $(0,1)$. Załóżmy, że $f(0) = f(1) = 0$.
a) Wykazać, że dla pewnego $a \in (0,1)$ zachodzi $f(a) + f'(a) = 0$.
b) Wykazać, że dla pewnego $b \in (0,1)$ zachodzi $b^2 f(b) + f'(b) = 0$.