

Analiza I.1

Zadania z gwiazdką

1 (z II serii, **rozwiązane** przez pana Jana Chomiaka; termin oddawania rozwiązań już minął). Dowieść, że dla $n \in \mathbb{N} \setminus 0$ spełniona jest nierówność $\sqrt{n} \binom{2n}{n} < 2^{2n-\frac{1}{2}}$.

2 (* / 2 z III serii, **rozwiązane** przez pana Kacpra Pasińskiego; termin oddawania rozwiązań już minął). Wykazać nierówność Bernoulliego dla wykładników wymiernych i liczb dodatnich, to znaczy wykazać, że dla $x > 0$ i liczby wymiernej $q \geq 1$ zachodzi nierówność $(1+x)^q \geq 1+qx$.

3 (z III serii). Dane są dodatnie liczby wymierne $p \leq q$. Korzystając jedynie z wiedzy z pierwszych sześciu wykładów, udowodnić nierówność między średnimi potęgowymi stopnia p i q , to znaczy wykazać, że dla dowolnych liczb nieujemnych $x_1, \dots, x_n$ zachodzi

$$\left(\frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{x_1^q + \dots + x_n^q}{n} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

4 (z III serii). Dla $x \in \mathbb{R}$ definiujemy część całkowitą liczby x (i oznaczamy ją jako $[x]$) jako jedyną liczbę całkowitą k spełniającą: $k \leq x < k+1$. Innymi słowy $[x]$ to największa liczba całkowita nie większa niż x .

Wykazać, że dla niewymiernej liczby $x > 1$ zbiory $\{[nx] : n \in \mathbb{N}\}$ i $\{[\frac{nx}{x-1}] : n \in \mathbb{N}\}$ są rozłączne, a ich suma to $\mathbb{N}$.

5 (* / 2 z IV serii). Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Obliczyć kresy zbioru

$$\left\{ \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n}{a_n + a_1} : a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \right\}.$$

6 (z serii V). Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ma tę własność, że dla każdego $\gamma > 1$ ciąg $(a_{[\gamma^n]})_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do 0. Czy wynika stąd, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do 0?

7 (z serii V, **rozwiązane** przez pana Filipa Lalika; termin oddawania rozwiązań już minął). Dany jest taki ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb nieujemnych, że dla każdego $n, m \in \mathbb{N}$ zachodzi $a_n + a_m \geq a_{n+m}$. Wykazać, że ciąg $(\frac{a_n}{n})_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny.

8 (z serii VIII). Dany jest szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych. Niech $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$. Wykazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n} = \infty$.

9 (z serii IX). Wykazać, że każdy ze zbiorów

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{n} \text{ jest zbieżny, } |z| = 1 \right\} \quad \text{ i } \quad \left\{ z \in \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{n} \text{ jest rozbieżny, } |z| = 1 \right\}$$

jest gęsty w zbiorze $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.