

Analiza I.1

XII seria zadań domowych

ZADANIA ĆWICZEBNE – NIE NA PUNKTY

1. Dane są funkcje ciągłe $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, przy czym f jest ograniczona (z góry i z dołu), a g nie jest ograniczona z góry ani nie jest ograniczona z dołu. Wykazać, że istnieje ciąg (x_n) zbieżny do ∞ , taki że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $f(x_n) = g(x_n)$.

2. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i 1-okresowa (to znaczy dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(x) = f(x + 1)$). Wykazać, że

- a) f jest jednostajnie ciągła;
- b) dla każdego $a \in \mathbb{R}$ istnieje $b \in \mathbb{R}$, takie że $f(a + b) = f(b)$.

3. Zbadać, czy funkcja f jest jednostajnie ciągła na A dla:

- a) $f = x^{\sqrt{x}}$, $A = (0, 1]$;
- b) $f = x^{\sqrt{x}}$, $A = (0, \infty)$;
- c) $f = x \cos x$, $A = \mathbb{R}$.

4. Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w 0, $f(0) = 0$ oraz że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$. Wykazać, że f jest jednostajnie ciągła.

5.

- a) Rozstrzygnąć, czy istnieje jednostajnie ciągła surjekcja (czyli funkcja na) $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.
- b) Rozstrzygnąć, czy istnieje ciągła bijekcja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.
- c) Zdefiniować ciągłą bijekcję $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

6. Dana jest funkcja jednostajnie ciągła $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Wykazać, że istnieje $M > 0$, takie, że dla wszystkich $x \geq 1$ zachodzi nierówność $|f(x)| \leq Mx$.

7. Załóżmy, że $\alpha > 1$, $C > 0$ oraz funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ warunek

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

Wykazać, że f jest funkcją stałą, tzn. że istnieje takie $a \in \mathbb{R}$, że $f(x) = a$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

8.

- (a) Czy jeśli $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła na $(-1, 0]$ oraz jest jednostajnie ciągła na $[0, 1)$, to czy musi być jednostajnie ciągła na $(-1, 1)$?
- (b) Czy każda funkcja ciągła okresowa musi być jednostajnie ciągła?
- (c) Czy jeśli $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i ograniczona, to jest jednostajnie ciągła?
- (d) Czy jeśli $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, ograniczona i monotoniczna, to jest jednostajnie ciągła?
- (e) Czy jeśli $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ jest jednostajnie ciągłą bijekcją, to f^{-1} jest jednostajnie ciągła?
- (f) Czy jeśli $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniają warunek Lipschitza, to fg również spełnia warunek Lipschitza?

- (g) Czy jeśli $f, g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ spełniają warunek Höldera, to fg również spełnia warunek Höldera?
- (h) Czy jeśli $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła, to $|f|$ również jest jednostajnie ciągła?

9. Zbadaj jednostajną ciągłość i lipschitzowskość na $(0, 1)$ funkcji f zadanych wzorami

- (a) $f(x) = \sin x$, (b) $f(x) = e^{1/x}$, (c) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$,
(d) $f(x) = \ln(1 + x)$, (e) $f(x) = \cos(\sin(x))$, (f) $f(x) = x \sin(1/x)$.