

Analiza I.1

XI seria zadań domowych

ZADANIA ĆWICZEBNE – NIE NA PUNKTY

1. Znaleźć wszystkie takie pary liczb rzeczywistych (a, b) , że funkcja $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \frac{e^{\sin x} - 1}{\ln(1+x)} & \text{jeżeli } -1 < x < 0, \\ b & \text{jeżeli } x = 0, \\ \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1+2x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+2x}} & \text{jeżeli } x > 0. \end{cases}$$

jest ciągła.

2. Wykazać, że istnieją $a, b \in \mathbb{R}$, takie że funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} (1+ax)^{1/x} & \text{jeżeli } x < 0, \\ b & \text{jeżeli } x = 0, \\ \frac{1-\cos(ax)}{x^2} & \text{jeżeli } x > 0. \end{cases}$$

jest ciągła.

3. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji f danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{p}{q+1} & \text{dla } x = \frac{p}{q}, \quad q \geq 1, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad \text{NWD}(p, q) = 1 \end{cases}$$

4. Dane są funkcje ciągłe $f_1, f_2, \dots, f_m : D \rightarrow \mathbb{R}$. Wykazać, że $x \mapsto \max\{f_1(x), f_2(x)\}$ jest funkcją ciągłą. Wywnioskować stąd, że

$$x \mapsto \max\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)\} \quad \text{oraz} \quad x \mapsto \min\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)\}$$

są funkcjami ciągłymi.

5. Czy kwadrat funkcji nieciągłej musi być funkcją nieciągłą? A sześcián?

6. Podać przykład funkcji $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, której zbiór punktów nieciągłości jest równy $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{\frac{k}{2^n} : k, n \in \mathbb{N}, k \leq 2^n\}$.

7. Funkcja $f : [-1, 1] \rightarrow (0, 1]$ jest ciągła. Wykazać, że równanie $f(x) = x^4$ ma co najmniej dwa rozwiązania na $[-1, 1]$.

8. Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła oraz że $f(16) = f(1) + 4$. Wykazać, że istnieje taki $x \in \mathbb{R}$, że $f(2x) = f(x) + 1$.

9. a) Liczby $c_n, c'_n \in \{0, 2\}$ spełniają równość $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c'_n}{3^n}$. Wykazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c'_n}{2^{n+1}}$.

- b) Niech $\mathcal{C}$ będzie zbiorem Cantora, czyli zbiorem wszystkich liczb z przedziału $[0, 1]$, które w (pewnym swoim) rozwinięciu (systemie) trójkowym składają się tylko z cyfr 0 i 2. Innymi słowy,

$$\mathcal{C} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} : \forall n \ c_n \in \{0, 2\} \right\}.$$

Definiujemy funkcję $f : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ wzorem $f(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^{n+1}}$. Wiemy z punktu a), że f jest dobrze zdefiniowana. Funkcja f jest oczywiście na $[0, 1]$. Wykazać, że f jest ciągła.

10 (*). Dana jest taka funkcja ciągła $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x > 0$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{x}{n}) = 0$. Wykazać, że $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.