

Analiza I.1

IX seria zadań domowych (na piątek 12 XII, godz. 10.15)

1 (Każdy podpunkt wart jest tyle, co $\frac{1}{2}$ zwykłego zadania). Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu:

$$\begin{aligned} & \text{(a)} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{[n/7]} \frac{1}{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}}, \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[\frac{n^3+n+1}{3n^2}]} \frac{\ln n}{n}, \\ & \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}, \quad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sin(\sqrt[3]{n^3+1}) - \sin(\sqrt[3]{n^3-1}) \right). \end{aligned}$$

2. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}, \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + n^2(1 + (-1)^n)}, \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n + \sqrt{n}}.$$

3. Obliczyć $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \dots$. W szczególności należy uzasadnić zbieżność szeregu danego w zadaniu.

4. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ musi być zbieżny?

5 (*). Wykazać, że każdy ze zbiorów

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{n} \text{ jest zbieżny, } |z| = 1 \right\} \quad \text{ i } \quad \left\{ z \in \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{n} \text{ jest rozbieżny, } |z| = 1 \right\}$$

jest gęsty w zbiorze $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

ZADANIA ĆWICZEBNE – NIE NA PUNKTY

6. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu:

$$\begin{aligned} & \text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 2019} \cos \frac{(2n+1)\pi}{4}, \quad \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n} \quad \text{dla } a > 0, \\ & \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^n \left(\frac{n\pi + 1}{4n + 1} \right), \quad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sin \left(\frac{\ln^{2025} n}{n^{1/2026}} \right) \end{aligned}$$

7. W zależności od parametru $c \in \mathbb{R}$ zbadać, czy poniższy szereg jest zbieżny i czy jest zbieżny bezwzględnie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - c^2)^n}{\sqrt{(n - 2025)^2 + 2026}}.$$

8. Niech P, Q będą niezerowymi wielomianami, przy czym $Q(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \geq n_0$. Wykazać, że szereg

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy $\deg(P) < \deg(Q)$.

Uwaga. W tym zadaniu nie trzeba używać pochodnych. Metody poznane dotąd na AM I.1 wystarczą.