

Analiza I.1

VIII seria zadań domowych (na piątek 5 XII, godz. 10.15)

ZADANIA SPRAWDZANE PRZEZ GRADERKĘ

1.

(a) Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^3 + 3n} - \sqrt{n^2 + 2}).$$

(b) Niech $\alpha > 0$. Zbadać zbieżność szeregu (w zależności od parametru α)

$$\sum_{n=2}^{\infty} ((\ln n)^{2/n} - 1)^{\alpha}.$$

2. Zbadać zbieżność szeregu w zależności od parametru $a > 0$ (pierwszy podpunkt wart jest tyle, co $\frac{2}{3}$ zadania, a drugi tyle, co $\frac{1}{3}$ zadania):

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} \binom{2n}{n}; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na^{\ln(\ln n)}}.$$

3. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu

$$\text{(a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^5 n}{n}; \quad \text{(b) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2^n} + 5}{2^{2^{n+1}} + 1}.$$

Uwaga: $\ln^5 n = (\ln n)^5$.

ZADANIE SPRAWDZANE PRZEZ PROWADZĄCĄ ĆWICZENIA – PROSZĘ ZAPISAĆ JE NA OSOBNEJ KARTCE

4. Dany jest szereg rozbieżny $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich. Zbadać zbieżność szeregów:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}, \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}.$$

5. Załóżmy, że ciąg liczb dodatnich (a_n) jest rosnący. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg (a_n) jest ograniczony.

6 (*). Dany jest szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych. Niech $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$. Wykazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n} = \infty$.

Na drugiej stronie znajdują się zadania ćwiczebne – nie na punkty.

ZADANIA ĆWICZEBNE – NIE NA PUNKTY

7. Zbadać zbieżność szeregu:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} n^n (\sqrt[n]{1+\alpha} - 1)^n \text{ dla } \alpha > 0,$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^3+2} - \sqrt{n^2-7}, \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt{n^2-7}.$$

8. Niech $\alpha, \beta > 0$. Zbadać zbieżność szeregu (w zależności od parametrów α, β):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n^\alpha} - 1}{n^\beta}.$$

9. Niech $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{n!} \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}.$$

10. Załóżmy, że $a_n \geq 0$ i że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Wykazać, że zbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{n-1}{n}}$.