

Analiza I.1

VII seria zadań domowych (na piątek 28 XI, godz. 10.15)

ZADANIA SPRAWDZANE PRZEZ GRADERKĘ

1. Uzasadnić, że szereg jest zbieżny i obliczyć jego sumę:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+k)}, \quad k \in \mathbb{N}; \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!!}; \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^n + (-1)^n)^2}{7^n}.$$

Uwaga: $(2n+1)!!$ oznacza iloczyn wszystkich nieparzystych liczb naturalnych mniejszych lub równych od $2n+1$.

2. Z badać zbieżność szeregu (każdy podpunkt wart jest tyle, co $\frac{1}{3}$ zadania):

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1,01 - \frac{1}{n})^n}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{2n+3} \right)^{\frac{n^{3/2}}{6}}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{3n+3} \right)^{\frac{n^{3/2}}{6}},$$
$$(d) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}, \quad (e) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}, \quad (f) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt[3]{n}}}.$$

ZADANIE SPRAWDZANE PRZEZ PROWADZĄCĄ ĆWICZENIA – PROSZĘ ZAPISAĆ JE NA OSOBNEJ KARTCE

3. Załóżmy, że funkcja $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ spełnia $|f(x) - f(y)| \leq 1/2|x - y|$ dla wszystkich $x, y \in [0, 1]$. Wykazać, że dla każdego $x \in [0, 1]$ ciąg $a_n = f^{(n)}(x)$, $n \geq 0$ jest zbieżny ($f^{(n)}$ oznacza n -krotne złożenie funkcji f , to znaczy $f^{(0)}(x) = x$ oraz $f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x))$ dla $n \geq 1$). Uzasadnić ponadto, że granica g nie zależy od wyboru punktu startowego x i jest jedyną liczbą w $[0, 1]$ spełniającą $f(g) = g$.

4. Wyrazy ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spełniają dla każdego $n \in \mathbb{N}$ nierówność $|x_n - x_{n-1}| < \frac{1}{n}$. Załóżmy, że $A < B < C$ oraz że A i C są granicami pewnych podciągów ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Wykazać, że istnieje podciąg ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżny do B .

Na drugiej stronie znajdują się zadania ćwiczebne – nie na punkty.

5. Obliczyć sumy szeregów

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a^n \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^3 a^n \quad \text{dla } |a| < 1.$$

6. Zbadać zbieżność szeregów:

$$\begin{aligned} & \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2025}}{2^n + 3^n}, \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n - 2^n}, \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\ln n}, \\ & \text{(d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(2 - \frac{1}{n}\right)^n}; \quad \text{(e)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n^2}}, \quad \text{(f)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}, \quad \text{(g)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}, \\ & \text{(h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6 + n^{12}}{n^8 + \sqrt[n]{n}}, \quad \text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8 + \sqrt[n]{n}}{n^6 + n^{12}}, \quad \text{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n^6 + n^{12}}{4^n n^8 + \sqrt[n]{n}}, \\ & \text{(k)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right), \quad \text{(l)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

7. Niech $\alpha > 0$. Zbadać zbieżność szeregów (w zależności od parametru α):

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n^\alpha 2^n}{3^n n^\alpha + 2^n}, \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})^\alpha, \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^a.$$