

Analiza I.1

VI seria zadań domowych (na środę 19 XI, godz. 10.15)

Przypomnijmy, że $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (na AM I.1 przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną).

ZADANIA SPRAWDZANE PRZEZ GRADERKĘ

1. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zadany jest rekurencyjnie:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 1, \quad a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \sqrt{a_{n-2}} \quad \text{dla } n \geq 3.$$

Udowodnić, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny i obliczyć jego granicę.

2. Wyznaczyć

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^1 + e^{\sqrt{2}} + \dots + e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}e^{\sqrt{n+1}}}, \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}} - 1 \right)^2 (1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}).$$

3. Podać przykład ciągów $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, takich że spełnione są (naraz) wszystkie poniższe warunki:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$,
- (2) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $b_n \neq 0$ oraz ciąg $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq 1}$ jest zbieżny do pewnej skończonej granicy $g \in \mathbb{R}$,
- (3) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $b_{n+1} \neq b_n$ oraz ciąg $(\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n})_{n \geq 1}$ jest zbieżny do pewnej skończonej granicy $h \in \mathbb{R}$,
- (4) $g \neq h$.

Wskazówka. Twierdzenie Stolza podpowiada, wśród jakich ciągów $(b_n)_{n \geq 1}$ na pewno *nie* należy szukać.

ZADANIE SPRAWDZANE PRZEZ PROWADZĄCĄ ĆWICZENIA – PROSZĘ ZAPISAĆ JE NA OSOBNEJ KARTCE

4. Wyznaczyć zbiór wszystkich możliwych granic ciągów postaci $(a_n^{q_n})_{n=1}^{\infty}$, gdzie $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ są takimi ciągami zbieżnymi do zera, że dla każdego $i \in \mathbb{N}$ zachodzi $a_i > 0$, $q_i \in \mathbb{Q}$.

5. Dane są taki ciąg liczb dodatnich $(p_n)_{n=1}^{\infty}$, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = 0$$

oraz ciąg $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżny do s . Wykazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 p_n + s_2 p_{n-1} + \dots + s_n p_1}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = s.$$

Na drugiej stronie znajdują się zadania ćwiczebne – nie na punkty.

6. Dane jest $a_1 > 0$. Zadajemy ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ rekurencyjnie: $a_{n+1} = (1 + a_n)/2$ dla $n \geq 1$. Rozstrzygnąć, dla jakich a ten ciąg ma granicę. Wyznaczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ dla wszystkich $a_1 > 0$, dla których ta granica istnieje.

7. Dane jest $a_1 \in \mathbb{R}$. Zadajemy ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ rekurencyjnie: $a_{n+1} = -(1 + a_n)/3$ dla $n \geq 1$. Rozstrzygnąć, dla jakich a ten ciąg ma granicę. Wyznaczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ dla wszystkich a_1 , dla których ta granica istnieje.

8. Niech $x_0 \in [0, 2]$. Zadajemy ciąg $(x_n)_{n=0}^\infty$ rekurencyjnie: $x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n(5 - x_n)$ dla $n \geq 0$. Rozstrzygnąć, dla jakich $x_0 \in [0, 2]$ ten ciąg ma granicę. Wyznaczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ dla wszystkich $x_0 \in [0, 2]$, dla których ta granica istnieje.

9. Dana jest liczba rzeczywista b . Ciąg (b_n) zadany jest rekurencyjnie:

$$b_0 = b, \quad b_{n+1} = -b_n + b_n^3 \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Zbadać zbieżność ciągu (b_n) . Obliczyć granicę ciągu (b_n) dla wszystkich parametrów b , dla których granica lub granica niewłaściwa tego ciągu istnieje.

10. Dane są $x \in \mathbb{R}$ oraz taki ciąg liczb dodatnich $(a_n)_{n=1}^\infty$, że $\lim_{n \rightarrow \infty} n^x a_n = a \in \mathbb{R}$. Wykazać, że $\lim_{n \rightarrow \infty} n^x (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = a e^x$.

11. Dana jest liczba dodatnia $a \neq 1$. Znaleźć wszystkie takie $x \in \mathbb{R}$, że ciąg

$$a_n = n^x (\sqrt[n]{a} - 1)$$

ma granicę skończoną i różną od 0. Obliczyć tę granicę dla każdego takiego x .

12. Niech $a, b > 0$. Obliczyć granice (w zależności od parametrów a, b):

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} a^n n^{bn}, & \text{(b)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(\ln n)^a} n^b, & \text{(c)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^a} n^{-b}, \\ \text{(d)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} b^n (\ln n)^{a \ln n}. \end{aligned}$$

13. Dane są ciągi liczb dodatnich $(a_n)_{n=1}^\infty$ i $(b_n)_{n=1}^\infty$, dla których

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = a \in (0, \infty) \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^n = b \in (0, \infty).$$

Założmy, że liczby nieujemne p i q spełniają zależność $p + q = 1$. Zbadać zbieżność i obliczyć (jeśli istnieje) granicę ciągu o wyrazie $(pa_n + qb_n)^n$.

14. Wyznaczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} n(e - (1 + \frac{1}{n})^n)$.

15 (*). Uwaga: to zadanie wymaga podstawowej wiedzy o zbiorach przeliczalnych. To zadanie również nie jest na punkty. Definiujemy funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem $f(x) := 1 - |1 - 2x|$. Ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ zadany jest rekurencją: $a_1 = a$ oraz $a_{n+1} = f(a_n)$ dla $n \in \mathbb{R}$. Wykazać, że istnieje $a \in [0, 1]$, takie że dla każdego $x \in [0, 1]$ istnieje podciąg ciągu $(a_n)_{n=1}^\infty$ zbieżny do x .