

Analiza I.1

V seria zadań domowych (na środę 5 XI, godz. 10.15)

Przypomnijmy, że $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (na AM I.1 przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną).

ZADANIA SPRAWDZANE PRZEZ GRADERKĘ

1. Wyznaczyć granicę ciągu lub wykazać, że ciąg nie ma granicy

- (a) $[\frac{1}{3} \text{ pkt}] a_n = \sqrt[n]{3^n + 4^n}$,
- (b) $[\frac{1}{3} \text{ pkt}] b_n = n \left(\sqrt[k]{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)$,
- (c) $[\frac{1}{3} \text{ pkt}] c_n = \sqrt[6]{n^6 + 3n^5} - \sqrt[6]{n^6 - 2n^5}$,
- (d) $[\frac{1}{2} \text{ pkt}] d_n = \sqrt{4n^2 + 3n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 4} - n$.

2. Dana jest liczba naturalna k oraz ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ zbieżny do 1. Wyznaczyć granicę ciągu

$$\frac{a_n + a_n^2 + \dots + a_n^k - k}{a_n - 1}$$

lub wykazać, że nie jest on zbieżny.

3 (Zadanie przeniesione do serii VI).

ZADANIA SPRAWDZANE PRZEZ PROWADZĄCĄ ĆWICZENIA – PROSZĘ ZAPISAĆ JE NA OSOBNEJ KARTCE

4. Dane są takie ciągi liczb **naturalnych** $(p_n)_{n=1}^\infty$ i $(q_n)_{n=1}^\infty$, że ciąg $(\frac{p_n}{q_n})_{n=1}^\infty$ jest zbieżny do liczby niewymiernej. Wykazać, że ciągi $(p_n)_{n=1}^\infty$ i $(q_n)_{n=1}^\infty$ są rozbieżne do nieskończoności.

5 (*). Ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ ma tę własność, że dla każdego $\gamma > 1$ ciąg $(a_{\lfloor \gamma^n \rfloor})_{n=1}^\infty$ jest zbieżny do 0. Czy wynika stąd, że ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ jest zbieżny do 0?

6 (*). Dany jest taki ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ liczb nieujemnych, że dla każdego $n, m \in \mathbb{N}$ zachodzi $a_n + a_m \geq a_{n+m}$. Wykazać, że ciąg $(\frac{a_n}{n})_{n=1}^\infty$ jest zbieżny.

Na drugiej stronie znajdują się zadania ćwiczebne – nie na punkty.

ZADANIA ĆWICZEBNE – NIE NA PUNKTY

7. Dane jest $M \in \mathbb{R}$ oraz funkcje $f, g: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, M)$. Udowodnić, że

$$\sup\{f(x) + g(x) : x \in \mathbb{R}\} \leq \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} + \sup\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

8. Wyznaczyć granicę ciągu lub dowieść, że ciąg nie ma granicy

(a) $a_n = n \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2} \right),$

(b) $b_n = \sqrt[n]{x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1},$ gdzie $x > 0$ jest ustalone,

(c) $\sqrt{c}, \sqrt{c + \sqrt{c}}, \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}, \dots$ w zależności od parametru $c \geq 0$.

9. Niech $a, b, c > 0$. Określamy ciągi $(a_n)_{n=1}^\infty$, $(b_n)_{n=1}^\infty$ i $(c_n)_{n=1}^\infty$ rekurencyjnie:

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad c_0 = c,$$

$$a_{n+1} = \frac{3}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n}}, \quad b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n c_n}, \quad c_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3}, \quad n \geq 0.$$

Wykazać, że te trzy ciągi są zbieżne do tej samej granicy skończonej.

10. Niech $a > 0$. Zbadać zbieżność ciągu $(a_n)_{n=1}^\infty$ zadanego rekurencyjnie:

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}, \quad n \geq 0.$$

Jeśli ciąg jest zbieżny, wyznaczyć jego granicę.