

Analiza I.1

IV seria zadań domowych (na środę 29 X, godz. 10.15)

Przypomnijmy, że $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (na AM I.1 przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną).

ZADANIA SPRAWDZANE PRZEZ GRADERKĘ

1. Zbadać, czy dany zbiór ma kres górny i czy ma kres dolny. Obliczyć te kresy, które istnieją.

- (a) [0,25 pkt] $A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{k} : k, n \in \mathbb{N} \right\}$,
- (b) [0,25 pkt] $B = \left\{ \frac{n^2}{3^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$,
- (c) [0,5 pkt] $C = \left\{ \frac{(n+m)^2}{2^{nm}} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$,
- (d) [0,5 pkt] $D = \left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{k}} + \frac{1}{\sqrt[k]{n}} : k, n \in \mathbb{N} \right\}$.

2. Zbadać, czy dany zbiór ma kres górny i czy ma kres dolny. Obliczyć te kresy, które istnieją.

- (a) $A_k = \left\{ \frac{kn}{1+k+n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.
- (b) $A = \left\{ \frac{kn}{1+k+n} : k, n \in \mathbb{N} \right\}$.

3. Wyznaczyć kres górny zbioru $\left\{ abcd - \frac{a^2}{2} - \frac{b^4}{4} - \frac{c^8}{8} - \frac{d^{16}}{16} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

ZADANIA SPRAWDZANE PRZEZ PROWADZĄCĄ ĆWICZENIA – PROSZĘ ZAPISAĆ JE NA OSOBNEJ KARTCE

4. Wykazać że:

- (a) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ dla A, B ograniczonych z góry;
- (b) $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$ dla A, B ograniczonych z góry. Rozstrzygnąć, czy dla wszystkich A, B ograniczonych z góry zachodzi $\sup(A \cap B) = \min(\sup A, \sup B)$.

5. Dany jest taki ograniczony z góry podzbiór A półprostej $(0, \infty)$, że zachodzi $\inf A =: a < b := \sup A$. Niech

$$B := \left\{ \sum_{j=1}^k \frac{a_j}{2^j} : k \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_k \in A \right\}.$$

Wyznaczyć kresy zbioru B .

6 (* / 2). Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Obliczyć kresy zbioru

$$\left\{ \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n}{a_n + a_1} : a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \right\}.$$