

Analiza I.1

III seria zadań domowych (na środę 22 X)

ZADANIA PISEMNE

1. Dany jest taki ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, że $a_0 \geq 0$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zachodzi

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2a_{n-1} + 1}.$$

Wykazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$a_n = \frac{a_0}{2na_0 + 1}.$$

2. Niech S będzie sumą dodatnich dzielników danej liczby $n \in \mathbb{N}$, zaś T – liczbą tych dzielników. Udowodnić, że $S \geq T\sqrt{n}$.

3. Dowieść, że dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ liczba $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ jest niewymierna.

Wskazówka: sprawdzić dokładnie, czy wymyślone rozwiązanie jest poprawne.

Gwiazdką oznaczone są zadania z gwiazdką, czyli zadania dodatkowe, które warte są tyle, co dwa zwykłe zadania domowe, ale które nie zwiększają maksymalnej możliwej do zdobycia liczby punktów za zadania domowe. Przypominam, że termin widoczny u góry nie dotyczy zadań gwiazdkowych.

- 4 (*). To zadanie warte jest tyle, co pół zadania gwiazdkowego, czyli jeden dodatkowy punkt). Wykazać nierówność Bernoulliego dla wykładników wymiernych i liczb dodatnich, to znaczy wykazać, że dla $x > 0$ i liczby wymiernej $q \geq 1$ zachodzi nierówność $(1+x)^q \geq 1+qx$.

- 5 (*). Dane są dodatnie liczby wymierne $p \leq q$. Korzystając jedynie z wiedzy z pierwszych sześciu wykładów, udowodnić nierówność między średnimi potęgowymi stopnia p i q , to znaczy wykazać, że dla dowolnych liczb nieujemnych $x_1, \dots, x_n$ zachodzi

$$\left(\frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{x_1^q + \dots + x_n^q}{n} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

- 6 (*). Dla $x \in \mathbb{R}$ definiujemy część całkowitą liczby x (i oznaczamy ją jako $[x]$) jako jedyną liczbę całkowitą k spełniającą: $k \leq x < k+1$. Innymi słowy $[x]$ to największa liczba całkowita nie większa niż x .

Wykazać, że dla niewymiernej liczby $x > 1$ zbiory $\{[nx] : n \in \mathbb{N}\}$ i $\left\{ \left[\frac{nx}{x-1} \right] : n \in \mathbb{N} \right\}$ są rozłączne, a ich suma to $\mathbb{N}$.

Zadania ćwiczebne, nie na punkty, znajdują się na odwrocie

ZADANIA ĆWICZEBNE, NIE NA PUNKTY

7. Załóżmy, że p i q są liczbami naturalnymi, przy czym $q > 1$. Udowodnić równość

$$\sum_{i=0}^p \frac{i!}{(q+i)!} = \frac{1}{q-1} \left(\frac{1}{(q-1)!} - \frac{(p+1)!}{(p+q)!} \right).$$

8. Dane są liczby rzeczywiste $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ oraz $\alpha > 0$. Udowodnić nierówność

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n a_i^2 + \frac{\alpha}{4} \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

9. Wykazać nierówność Weierstrassa, to znaczy wykazać, że jeśli $a_1, \dots, a_n > -1$ mają ten sam znak (czyli wszystkie są nieujemne lub wszystkie są niedodatnie), to zachodzi nierówność

$$\prod_{i=1}^n (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i.$$

Wywnioskować z niej nierówność Bernoulliego.