

Analiza I.1

II seria zadań domowych (na 15 X)

Poniżej $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (z zerem). Przed przystąpieniem do zapisywania rozwiązań należy przeczytać punkt 7 instrukcji ze strony https://www.mimuw.edu.pl/~martast/instrukcja_obsługi.pdf. Należy oddawać tylko spisane rozwiązania zadań pisemnych. Rozwiązania zadań ćwiczebnych można zapisać, ale proszę mi ich nie oddawać do sprawdzenia.

Tę serię – podobnie jak pierwszą – będzie można poprawiać.

ZADANIA PISEMNE

1. Wykazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$:

(a) zachodzi wzór

$$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + n(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}.$$

(a) liczba $2^{2^n} - 6$ jest podzielna przez 10.

2. Udowodnić, że dla każdego n zachodzi

$$\sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} 2^{-k} = 1.$$

Poniższe zadanie pochodzi z kartki z I serią, ale jest na 15 X.

3. Wykazać, że dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n oraz liczb rzeczywistych $a_1, \dots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Gwiazdką oznaczone są zadania z gwiazdką, czyli zadania dodatkowe, które warte są tyle, co dwa zwykłe zadania domowe, ale które nie zwiększają maksymalnej możliwej do zdobycia liczby punktów za zadania domowe. Przypominam, że termin widoczny u góry nie dotyczy zadań gwiazdkowych.

4 (*). Dowieść, że dla $n \in \mathbb{N} \setminus 0$ spełniona jest nierówność $\sqrt{n} \binom{2n}{n} < 2^{2n-\frac{1}{2}}$.

ZADANIA ĆWICZEBNE, NIE NA PUNKTY

5. Udowodnić, że dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ zachodzi podwójna nierówność

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1.$$

6. Wykazać, że dla $n \in \mathbb{N}$ spełniona jest nierówność $\sqrt{n} \binom{2n}{n} \geq 2^{2n-1}$.

7. Dowieść, że dla $n \in \mathbb{N} \setminus 0$ zachodzi wzór

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

8. Wykazać, że dla $n \in \mathbb{N} \setminus 0$ zachodzą wzory

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$