

Analiza I.1

I seria zadań domowych (na 10 X)

Poniżej $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (z zerem). W tej serii zadań domowych nie można korzystać z metody indukcji matematycznej. Przed przystąpieniem do zapisywania rozwiązań należy przeczytać punkt 7 instrukcji ze strony https://www.mimuw.edu.pl/~martast/instrukcja_obsługi.pdf. Należy oddawać tylko spisane rozwiązania zadań pisemnych. Rozwiązania zadań ćwiczebnych można zapisać, ale proszę mi ich nie oddawać do sprawdzenia.

Na ćwiczeniach 8 X otrzymają Państwo II serię zadań domowych, złożoną z 2-3 zadań pisemnych, którą będzie trzeba oddać 15 X. Drugą serię – podobnie jak pierwszą – będzie można poprawiać.

ZADANIA PISEMNE

1. Wykazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ zachodzi wzór

$$\sum_{j=0}^n q^j = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

2. Udowodnić, że każda liczba naturalna daje tę samą resztę z dzielenia przez 9, co suma jej cyfr.

- 3 (To zadanie ma nowy termin: 15 X). Wykazać, że dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n oraz liczb rzeczywistych $a_1, \dots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

ZADANIA ĆWICZEBNE, NIE NA PUNKTY

4. Dane są $n \in \mathbb{N}$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$. Niech $x_k = ka + b$ dla $k = 0, 1, \dots, n$ (to znaczy, że $x_0 = b$ oraz $x_{k+1} = a + x_k$ dla $k = 0, 1, \dots, n-1$). Obliczyć $\sum_{k=0}^n x_k$.

*Uwaga: chociaż nie jest to wprost napisane w zadaniu, należy **udowodnić**, że podana odpowiedź jest poprawna. To samo będzie dotyczyć wszystkich zadań, z jakimi spotkają się Państwo podczas studiów na tym wydziale.*

5. Dowieść, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi wzór

$$\sum_{j=0}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$