Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Marcin Pilipczuk
Nr albumu: 214563

Uzwarcenie i Korona Higsona

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dra Tadeusza Koźniewskiego

Maj 2007

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

W poniższej pracy przedstawiam, z wszystkimi potrzebnymi narzędziami, konstrukcję oraz podstawowe właściwości uzwarcenia i korony Higsona dla właściwej przestrzeni zgrubnej. Pokazuję, że korona Higsona może być zdefiniowana dla dowolnej przestrzeni zgrubnej i, w końcowym wniosku, dowodzę związków korony Higsona z równoważnością zgrubną przestrzeni. W ramach potrzebnych narzędzi, wprowadzam sieci oraz teorię przemiennych $\mathbb{C}^*$-algebr na potrzeby konstrukcji i analizy uzwarceń przestrzeni lokalnie zwartych Hausdorffa.

Słowa kluczowe

uzwarcenie, sieć, struktura zgrubna, topologiczna struktura zgrubna, kontrolowany w sposób ciągły

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

54-xx General topology
54Dxx Fairly general properties
54D35 Extensions of spaces (compactifications, supercompactifications, completions, etc.)

Tytuł pracy w języku angielskim

Higson's compactification and Higson's corona

Spis treści

Wprowadzenie

Celem poniższej pracy jest przedstawienie uzwarcenia i korony Higsona, wraz z podstawowymi właściwościami.

W rozdziale pierwszym przedstawiam najprostsze narzędzia i przypominam kilka definicji z zakresu topologii ogólnej: aksjomaty przeliczalności, przestrzenie zwarte i parazwarte oraz pojęcie sieci. Ze względu na brak pojęcia sieci w programie przedmiotu Topologii I dokładnie omawiam z dowodami właściwości sieci w przestrzeniach Hausdorffa.

W rozdziale drugim wprowadzam podstawowe narzędzie do analizy uzwarceń, mianowicie przemienne $\mathbb{C}^*$-algebry. Przedstawiam podstawowe właściwości i związki $\mathbb{C}^*$-algebr z przestrzeniami zwartymi. W szczególności pokazuję, że każde uzwarcenie pochodzi od jakiejś $\mathbb{C}^*$-podalgebry algebry wszystkich funkcji zespolonych, ciągłych, ograniczonych i pokazuję jak zawieranie się podalgebr wpływa na zależności między uzwarceniami. Ze względu na narzędziowy, a przy tym trudny charakter tego rozdziału dowody są w większości szkicowe.

Rozdział trzeci przedstawia skrótowo podstawowe pojęcia przestrzeni zgrubnych oraz pokazuje konstrukcję topologicznej struktury zgrubnej dla danego uzwarcenia. Uzwarcenie Higsona jest próbą odwrócenia operacji tworzenia topologicznej struktury zgrubnej.

W czwartym rozdziale przedstawiam konstrukcję korony i uzwarcenia Higsona. Następnie pokazuję podstawowe właściwości uzwarcenia Higsona, dowodzę w jakim stopniu uzwarcenie Higsona jest odwróceniem operacji wzięcia topologicznej struktury zgrubnej. Na koniec pokazuję, że definicja korony Higsona jest ogólniejsza od samego uzwarcenia i kończę pracę dowodem twierdzenia, że zgrubnie równoważne przestrzenie mają homeomorficzne korony Higsona.

Rozdział 1

Podstawowe definicje

W tym rozdziale omówimy podstawowe i proste narzędzia używane w dalszej pracy. Najpierw przypomnimy warunki przeliczalności przestrzeni. Następnie wprowadzimy pojęcie sieci, które jest przeniesieniem idei ciągów na dowolne przestrzenie topologiczne Hausdorffa. Na koniec wprowadzimy pojęcie przestrzeni parazwartej.

1.1. Warunki przeliczalności i przestrzenie zwarte

Przypomnijmy, co to znaczy pierwszy i drugi warunek przeliczalności i jak one się wiążą z przestrzeniami zwartymi.

Definicja 1.1.1. Mówimy że przestrzeń *spełnia pierwszy warunek przeliczalności* jeśli każdy punkt ma przeliczalną bazę otoczeń.

Przykład 1.1.2. Przestrzeń metryzowalna spełnia pierwszy warunek przeliczalności — wystarczy wziąć kule o promieniu $\frac{1}{n}$ wokół każdego punktu.

Definicja 1.1.3. Mówimy że przestrzeń *spełnia drugi warunek przeliczalności* jeśli jej topologia ma przeliczalną bazę.

Twierdzenie 1.1.4 (Urysohn). *Przestrzeń T3 spełniająca drugi warunek przeliczalności jest metryzowalna.*

Fakt 1.1.5. *Przestrzeń zwarta metryzowalna spełnia drugi warunek przeliczalności.*

Dowód. Dla każdego n zbiór $\{B(x, \frac{1}{n}) : x \in X\}$ jest pokryciem otwartym, możemy z niego wybrać pokrycie skończone. Zauważmy, że sumując te pokrycia skończone dla każdego n otrzymamy bazę topologii na X. Istotnie, jeśli U jest zbiorem otwartym w X, to dla każdego punktu $x \in U$ dla pewnego n mamy $B(x, \frac{1}{n}) \subset U$, ale x siedzi w jakiejś kulce $B(y, \frac{1}{2n})$ z wybranego pokrycia skończonego dla $2n$. Ta kulka zawiera się w $B(x, \frac{1}{n})$, czyli też w U. Sumując takie kulki dla każdego $x \in U$ otrzymamy U, czyli jest to rzeczywiście baza topologii. $\square$

Wniosek 1.1.6. Przestrzeń zwarta jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy gdy spełnia drugi warunek przeliczalności.

1.2. Sieci

Na prostej rzeczywistej bardzo użytecznym jest pojęcie ciągu i zbieżności ciągu. Dzięki niemu możemy sprawdzić czy funkcja jest ciągła, czy zbiór jest domknięty lub otwarty itd. Tymczasem w ogólnych przestrzeniach topologicznych ciągi (jak poniżej pokażemy) nie wystarczają. *Sieć* okazuje się być bardzo dobrym uogólnieniem pojęcia ciągu i sporo wyników dla ciągów na prostej rzeczywistej przenosi się na sieci w przestrzeniach Hausdorffa.

Definicja 1.2.1. *Zbiorem skierowanym* nazywamy zbiór X wraz z częściowym porządkiem $\leqslant$, taki, że dla każdych $a, b \in X$ istnieje $c \in X$, że $a \leqslant c$ i $b \leqslant c$.

Przykład 1.2.2. Dowolny porządek liniowy na zbiorze X definiuje zbiór skierowany ($c = \max(a, b)$).

Przykład 1.2.3. Weźmy przestrzeń topologiczną X i punkt $x \in X$. Zbiór wszystkich otoczeń (otwartych) punktu X z porządkiem będącym odwrotną inkluzją ($U \leqslant V \Leftrightarrow V \subset U$) jest zbiorem skierowanym ($c = a \cap b$).

Definicja 1.2.4. *Siecią* w zbiorze X, indeksowaną zbiorem skierowanym A nazywamy dowolną funkcje $A \to X$. Wartość tej funkcji w punkcie $\alpha \in A$ będziemy oznaczać przez x_α.

Uwaga 1.2.5. Skoro liczby naturalne są zbiorem skierowanym, to dowolny ciąg jest siecią. Powyższa definicja jest uogólnieniem definicji ciągu.

Spróbujmy teraz uogólnić definicję zbieżności ciągu. W poniższych definicjach niech X będzie przestrzenia topologiczną, niekoniecznie metryczną.

Definicja 1.2.6. Niech $Y \subset X$. Mówimy, że sieć (x_α) jest *rezydualnie w* Y jeśli istnieje $\alpha \in A$, że dla każdego $\beta \geqslant \alpha$ zachodzi $x_\beta \in Y$.

Definicja 1.2.7. Mówimy, że sieć (x_α) *zbiega do* x, jeśli dla każdego otoczenia Y punktu x sieć (x_α) jest rezydualnie w Y.

Uwaga 1.2.8. Zauważmy, że dla ciągów w przestrzeni metrycznej ta definicja zbieżności pokrywa się z definicją klasyczną.

Uwaga 1.2.9. Możemy sprawdzać tę definicję tylko dla otoczeń otwartych punktu x, gdyż jeśli U jest otoczeniem x, to $intU \subset U$ też jest otoczeniem i jeśli sieć jest rezydualnie w $intU$, to jest też rezydualnie w U.

Przykład 1.2.10. Weźmy punkt $x \in X$. Jak już zauważyliśmy w przykładzie 1.2.3, otoczenia x w X tworzą zbiór skierowany. W każdym takim otoczeniu U weźmy jeden punkt x_U. To jest sieć w X. Co więcej, ta sieć jest zbieżna do x. Istotnie, jeśli U jest otoczeniem x, to dla każdego $U \leqslant V$ (czyli $V \subset U$) mamy $x_V \in V \subset U$.

Mamy już definicję sieci i zbieżności sieci, które są uogólnieniem definicji ciągu. Udowodnijmy teraz jakieś własności. W szczególności dobrze by było, jeśli ciąg miałby tylko jedną granicę.

Fakt 1.2.11. *X jest przestrzenią Hausdorffa wtedy i tylko wtedy gdy każda sieć w X ma co najwyżej jedną granicę.*

Dowód. Niech X będzie przestrzenią Hausdorffa. Załóżmy, że sieć (x_α) ma dwie granice x i x'. Weźmy rozłącze otwarte otoczenia $x \in U$ i $x' \in U'$. (x_α) jest rezydualnie w U i w U', czyli istnieją $\alpha, \alpha' \in A$ tak jak w definicji. A jest skierowany, czyli istnieje $\gamma \geqslant \alpha, \alpha'$. Czyli $x_\gamma \in U$ i $x_\gamma \in U'$, co jest sprzeczne z rozłącznością U i U'.

W drugą stronę, zauważmy, że zbiorem skierowanym są pary otoczeń otwartych punktów x i y, z odwrotną inkluzją obu współrzędnych, tj. $(U_x, U_y) \leqslant (V_x, V_y)$ wtedy i tylko wtedy gdy zarówno $V_x \subset U_x$ jak i $V_y \subset U_y$. Niech x i y będą punktami zaprzeczającymi Hausdorffowości przestrzeni. Wówczas możemy z każdej pary otoczeń otwartych (U_x, U_y) wybrać punkt $x_{(U_x,U_y)} \in U_x \cap U_y$. To jest sieć i w świetle definicji zbieżności zbiega zarówno do x jak i do y. Istotnie, dla otoczenia U_x punktu U, element (U_x, X) jest świadkiem na to, że ciąg $x_{(U_x,U_y)}$ jest rezydualnie w U_x. □

Do dalszych rozważań potrzebujemy jeszcze kilku definicji.

Definicja 1.2.12. Powiemy, że sieć (x_α) jest *często w* $Y \subset X$, jeśli dla każdego $\alpha \in A$ istnieje $\beta \geqslant \alpha$, że $x_\beta \in Y$.

Definicja 1.2.13. Powiemy, że sieć (x_α) ma *punkt skupienia w* $x \in X$ jeśli dla każdego otoczenia U punktu x sieć (x_α) jest często w U.

Okazuje się, że w języku sieci można przedstawić równoważnie wiele definicji topologicznych w przestrzeniach Hausdorffa. Poniżej przedstawiam ciąg przydatnych faktów. W tych faktach milcząco zakładamy, że występujące przestrzenie są Hausdorffa.

Fakt 1.2.14. *Niech $Y \subset X$. Wówczas $x \in clY$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje sieć w Y zbieżna do x. W szczególności Y jest domknięty wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie granice sieci z Y leżą w Y.*

Dowód. Niech A będzie zbiorem tych $x \in X$, że istnieje sieć w Y zbieżna do x. Weźmy punkt $x \in clY$. Skoro jest to punkt w domknięciu, to dla każdego otoczenia U punktu x mamy $Y \cap intU \neq \emptyset$. Weżmy sieć (x_U) indeksowaną otoczeniami x, tak, że $x_U \in Y \cap intU$. Wówczas (x_U) jest siecią w Y i $x_U \in U$, czyli $(x_U) \to x$. Czyli $clY \subset A$.

Z drugiej strony, niech $x \notin clY$. Czyli $U = X \setminus clY$ jest otoczeniem otwartym x. Dla każdej sieci x_α zawartej w Y, x_α nie ma szans być rezydualnie w U, bo $\forall_\alpha x_\alpha \notin U$. Czyli (x_α) nie może zbiegać do x. Czyli $A = clY$.

Zdanie „W szczególności…" jest oczywistą konsekwencją faktu: Y jest domnknięty wtedy i tylko wtedy gdy $Y = clY = A$, a A jest zbiorem granic sieci. □

Fakt 1.2.15. *Funkcja $f : X \to Y$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $x \in X$ i dla każdej sieci (x_α) zbieżnej do x, sieć $(f(x_\alpha))$ jest zbieżna do $f(x)$.*

Dowód. Oczywiście $(f(x_\alpha))$ jest siecią — jest to ciąg elementów Y indeksowany zbiorem skierowanym A. Załóżmy, że $f : X \to Y$ jest ciągła i niech $(x_\alpha) \to x$. Niech U będzie otoczeniem otwartym $f(x)$. Chcemy wykazać, że $(f(x_\alpha))$ jest rezydualnie w U. f jest ciągła, więc $f^{-1}(U)$ jest zbiorem otwartym w X, w dodatku $f(x) \in U$ czyli $x \in f^{-1}(U)$, czyli $f^{-1}(U)$ jest otoczeniem x. Wiemy, że $(x_\alpha) \to x$, czyli istnieje β — świadek na to, że (x_α) jest rezydualnie w $f^{-1}(U)$. Ale $f(f^{-1}(U)) \subset U$, czyli β jest świadkiem na to, że $(f(x_\alpha))$ jest rezydualnie w U.

Z drugiej strony, przypuśćmy, że $f : X \to Y$ nie jest ciągła. Istnieje wobec tego otwarty zbiór $U \subset Y$, że $V = f^{-1}(U)$ nie jest otwarte. W związku z tym możemy wybrać punkt $x \in V \setminus intV$. Skoro x nie jest w $intV$, to dla każdego otoczenia W punktu x, $W \setminus V \neq \emptyset$, w przeciwnym wypadku $intV \cup intW$ byłoby większym od $intV$ otwartym podzbiorem V.

Skonstruujmy sieć (x_W) indeksowaną otoczeniami punktu x, gdzie $x_W \in W \setminus V$. Skoro $x_W \in W$, to $(x_W) \to x$. Z drugiej strony, skoro $x_W \notin V$, to $f(x_W) \notin U$. Zbiór $Y \setminus U$ jest domknięty, czyli jeśliby $(f(x_W))$ miało granicę, to z faktu 1.2.14 granica ta nie mogłaby być w U. W szczególności $(f(x_W))$ nie może zbiegać do $f(x) \in U$. □

Uwaga 1.2.16. Ten fakt nie jest prawdziwy jeśli zastąpimy sieć przez ciąg w przestrzeniach niespełniających pierwszego aksjomatu przeliczalności. Rozważmy zbiór $X = \omega_1$ z topologią $\mathbf{T} = \{U \subset X : |X \setminus U| \leqslant \omega\} \cup \{\emptyset\}$. Jeśli ciąg (x_n) zbiega do x, to powinien od pewnego miejsca siedzieć w następującym otoczeniu punktu x: $U_0 = (X \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}) \cup \{x\}$. Jest to zbiór otwarty (wyrzuciliśmy co najwyżej przeliczalnie wiele punktów), a $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cap U_0 \subset \{x\}$. Czyli ciąg (x_n) od pewnego miejsca musi być równy x. Wobec tego dla dowolnej przestrzeni metrycznej dowolna funkcja $f : X \to Y$ spełnia warunek, że jeśli $x_n \to x$ to $f(x_n) \to f(x)$, w szczególności dla $Y = \omega_1$ z topologią dyskretną i f będącego identycznością na ω_1. Ale wówczas żeby f była ciągła, topologia na X musiałaby być dyskretna, sprzeczność.

Wprowadźmy definicję podsieci. Może się ona wydawać lekko skomplikowana, ale pokażemy zaraz jej użyteczność. Potrzebujemy takiej definicji, gdyż chcemy by niejako „podsieć nie kończyła się wcześniej niż sieć".

Definicja 1.2.17. Jeśli A i B są zbiorami skierowanymi i $f : A \to B$ zachowuje porządek, to f jest *kofinalna* jeśli dla każdego $b \in B$ istnieje $a \in A$ takie, że dla każdego $a' \geqslant a$ mamy $f(a') \geqslant b$. W szczególności mamy $f(a) \geqslant b$.

Definicja 1.2.18. Jeśli A i B są zbiorami skierowanymi i $\phi : B \to X$ jest siecią w przestrzeni X, zaś $f : A \to B$ jest funkcją kofinalną, to $\phi \circ f$ nazywamy *podsiecią sieci* ϕ.

Wniosek 1.2.19. Niech $A \subset B$ i f będzie identycznością na A. Wówczas to jest kofinalne, jeśli dla każdego $b \in B$ istnieje $a \in A$ takie, że $a \geqslant b$. Wówczas oczywiście dla każdego $a' \geqslant a$ mamy $a \geqslant b$. Czyli dowolny podzbiór $A \subset B$ taki, że dla każdego $b \in B$ istnieje $b \leqslant a \in A$ wyznacza podsieć.

Fakt 1.2.20. *Sieć ma punkt skupienia w x wtedy i tylko wtedy gdy ma podsieć zbieżną do x.*

Dowód. Implikacja z prawa na lewo jest prosta. Weźmy sieć (x_β) o zbiorze indeksów B oraz zbiór skierowany A i funkcję kofinalną $f : A \to B$ wyznaczają podsieć zbieżną do x. Niech U będzie dowolnym otoczeniem x, niech $\alpha_0 \in A$ będzie świadkiem na to, że $(x_{f(\alpha)})$ jest rezydualnie w U. f jest funkcją kofinalną, czyli dla każdego $\beta \in B$ istnieje $\alpha_1 \in A$, że $f(\alpha_1) \geqslant \beta$. Niech $\alpha_2 \geqslant \alpha_0, \alpha_1$. Wówczas $f(\alpha_2) \geqslant \beta$ i $x_{f(\alpha_2)} \in U$, czyli (x_β) jest często w U. Z dowolności wyboru U mamy, że (x_β) ma punkt skupienia w x.

Załóżmy teraz, że x jest punktem skupienia sieci (x_β) o zbiorze indeksów B. Niech $A_0 = \{U : x \in int\ U\}$ będzie zbiorem skierowanym otoczeń x i niech $A = A_0 \times B$, czyli niech A będzie zbiorem skierowanym par (U, β) takich, że $(U, \beta) \leqslant (U', \beta')$ wtedy i tylko wtedy gdy zarówno $U \leqslant U'$ jak i $\beta \leqslant \beta'$. Skoro (x_β) ma punkt skupienia w x, to dla każego $(U, \beta) \in A$ istnieje $f(U, \beta) \in B$, że $x_{f(U,\beta)} \in U$ i $f(U, \beta) \geqslant \beta$.

Spróbujmy udowodnić, że właśnie zdefiniowana $f : A \to B$ jest kofinalna. Niech $\beta \in B$. Niech $\alpha = (X, \beta)$. Wówczas, jeśli $(U, \beta') \geqslant \alpha$, to $\beta' \geqslant \beta$ i $f(U, \beta') \geqslant \beta$, czyli f jest kofinalne, czyli wyznacza podsieć (x_β).

Niech β_0 będzie dowolnym elementem B. Weźmy dowolne otoczenie U punktu x. Wówczas $(U, \beta_0) \in A$ jest świadkiem na to, że $x_{f(\alpha)}$ jest rezydualnie w U. Istotnie, jeśli $(V, \beta) \geqslant (U, \beta_0)$, to $x_{f(V,\beta)} \in V \subset U$. Wnioskujemy stąd, że $x_{f(\alpha)} \to x$. □

Fakt 1.2.21. *Jeśli X jest przestrzenią zwartą, to każda sieć ma podsieć zbieżną.*

Dowód. Weźmy sieć (x_α) w przestrzeni zwartej X. Zgodnie z faktem 1.2.20, wystarczy udowodnić że sieć (x_α) ma punkt skupienia. Załóżmy przeciwnie, czyli że dla każdego $x \in X$ punkt x nie jest punktem skupienia (x_α). Czyli istnieje otoczenie U_x punktu x takie, że (x_α) nie jest często w U_x, czyli istnieje takie γ_x, że dla każdego $\alpha \geqslant \gamma_x$ mamy $x_\alpha \notin U_x$.

Zbiory $\{U_x : x \in X\}$ to pokrycie otwarte przestrzeni X, możemy wybrać pokrycie skończone $U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_n}$. Weźmy element zbioru indeksów sieci $\gamma \geqslant \gamma_{x_i}$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wówczas dla każdego $\alpha \geqslant \gamma \geqslant \gamma_{x_i}$ mamy $x_\alpha \notin U_{x_i}$. Czyli $x_\alpha \notin \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} = X$, sprzeczność. Więc (x_α) ma punkt skupienia w X, czyli na mocy faktu 1.2.20 ma też podsieć zbieżną. $\square$

1.3. Przestrzenie parazwarte

W przyszłości będziemy się zajmowali przestrzeniami parazwartymi. Jest to osłabienie własności zwartości; w szczególności każda przestrzeń metryzowalna jest parazwarta a niekoniecznie zwarta. Podaję tu kilka przydatnych faktów bez dowodów. Dokładne omówienie przestrzeni parazwartych Czytelnik może znaleźć w książce R. Engelkinga *Topologia ogólna.*

Definicja 1.3.1. *Rozkładem jedynki* w przestrzeni topologicznej X nazywamy taki zbiór funkcji ciągłych $\phi_\alpha : X \to [0, 1]$, że dla każdego $x \in X$ zbiór $\{\phi_\alpha : \phi_\alpha(x) > 0\}$ jest co najwyżej przeliczalny i $\sum \phi_\alpha(x) = 1$. Rozkład jedynki jest *wpisany* w pokrycie otwarte U_α przestrzeni X, jeśli dla każdego α mamy $supp\phi_\alpha \subset U_\alpha$. Rozkład jedynki jest *lokalnie skończony*, jeśli dla każdego x istnieje otoczenie U punktu x, że w otoczeniu U tylko skończenie wiele funkcji ϕ_α przyjmuje jakąś niezerową wartość.

Definicja 1.3.2. Przestrzenią *parazwartą* nazywamy taką przestrzeń topologiczną, w której dla każdego pokrycia otwartego istnieje lokalnie skończony rozkład jedynki wpisany w to pokrycie.

Fakt 1.3.3. *Przestrzeń jest parazwarta wtedy i tylko wtedy, gdy w każde pokrycie otwarte można wpisać pokrycie otwarte lokalnie skończone.*

Uwaga 1.3.4. Przestrzeń zwarta jest parazwarta. Przestrzeń metryzowalna jest parazwarta.

Fakt 1.3.5. *Każda przestrzeń parazwarta jest normalna.*

Rozdział 2

$\mathbb{C}^*$-algebry i uzwarcenia

Istotnym narzędziem przy badaniu przestrzeni zwartych są przemienne $\mathbb{C}^*$-algebry. Naszym sztandarowym przykładem przemiennej $\mathbb{C}^*$-algebry będzie zbiór funkcji ciągłych i ograniczonych z przestrzeni zwartej X w ciało liczb zespolonych. Pokażemy kilka zadziwiających faktów, m.in. to, że jeśli dwie przestrzenie zwarte mają izomorficzne $\mathbb{C}^*$-algebry zespolonych funkcji ciągłych, to już muszą być homeomorficzne.

2.1. $\mathbb{C}^*$-algebra

Przed nami szereg definicji związany z $\mathbb{C}^*$-algebrami w ogólności.

Definicja 2.1.1. Przestrzeń liniową nad ciałem K nazywamy *K-algebrą*, jeśli dodatkowo ta przestrzeń liniowa (jako grupa abelowa) jest wyekwipowana w mnożenie tak, że tworzy pierścień. Mnożenie przez stałą w przestrzeni liniowej jest przemienne z mnożeniem w pierścieniu.

Uwaga 2.1.2. Zauważmy, że powyższa definicja jest także sensowna, jeśli o K założymy, że jest tylko pierścieniem. Wówczas zamiast przestrzeni liniowej mamy moduł.

Przykład 2.1.3. Dowolny pierścień możemy uznać za algebrę nad pierścieniem $\mathbb{Z}$, gdzie mnożenie przez n to dodawanie n razy.

Przykład 2.1.4. Zbiór funkcji ciągłych z X w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ jest algebrą, gdzie operacją mnożenia jest mnożenie punktowe. Tak samo zbiór funkcji ograniczonych czy też ciągłych ograniczonych jest algebrą.

Definicja 2.1.5. K-algebra jest *algebrą Banacha*, jeśli $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$, jest wyposażona w normę $\|\cdot\|$ tak, by tworzyła przestrzeń Banacha. Dodatkowo wymagamy, by zachodziło $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

Uwaga 2.1.6. Warunek wiążący mnożenie z normą implikuje ciągłość mnożenia jako operacji $X \times X \to X$.

Przykład 2.1.7. Zbiór funkcji ograniczonych ze zbioru X w $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) z dodawaniem i mnożeniem punktowym i normą supremum jest algebrą Banacha.

Definicja 2.1.8. $\mathbb{C}$-algebra jest $\mathbb{C}^*$-algebrą, jeśli jest dodatkowo wyekwipowana w *sprzężenie* $* : X \to X$. To sprzężenie spełnia następujące warunki:

- $(x + y)^* = x^* + y^*$,

- $(xy)^* = y^* x^*$,
- $(ax)^* = \bar{a} x^*$,
- $(x^*)^* = x$,
- $\|x^* x\| = \|x\|^2$.

Przykład 2.1.9. Funkcje ciągłe lub ciągłe ograniczone lub ciągłe z X w $\mathbb{C}$ tworzą $\mathbb{C}^*$-algebrę, jeśli dodatkowo operacją sprzężenia jest sprzężenie punktowe ($f^*(x) = \overline{f(x)}$).

Przykład 2.1.10. Niech $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ i niech A będzie zbiorem wszystkich funkcji ciągłych $D \to \mathbb{C}$. Jako, że D jest zwarte, każda taka funkcja jest ograniczona. Zdefiniujmy wszystkie operacje $\mathbb{C}^*$-algebry na A tak samo, jak w poprzednim przykładzie, za wyjątkiem sprzężenia: niech $f^*(x) = \overline{f(\bar{x})}$.

Wówczas A *nie* będzie $\mathbb{C}^*$-algebrą. Nie będzie spełniała ostatniego warunku definicji sprzężenia, mówiącego, że $\|x^* x\| = \|x\|^2$. Weźmy $f \in A$, $f(x) = \max(0, Im\ x)$. Wtedy $f^*(x) = \max(0, -Im\ x)$ i $f^* \cdot f = 0$.

Dla porządku, podamy „wzorcowy” przykład $\mathbb{C}^*$-algebry.

Przykład 2.1.11. Ciągłe liniowe operatory z przestrzeni zespolonej Hilberta $H \to H$, ze składaniem, dodawaniem i sprzężeniem Hermitowskim tworzą niekoniecznie przemienną $\mathbb{C}^*$-algebrę.

Twierdzenie 2.1.12 (Gelfand-Naimark)**.** *Każda $\mathbb{C}^*$-algebra jest izomorficzna z domkniętą normowo i domkniętą ze względu na branie sprzężeń Hermitowskich podalgebrą przestrzeni ciągłych liniowych operatorów $H \to H$ nad jakąś przestrzenią zespoloną Hilberta.*

2.2. Spektrum elementu $\mathbb{C}^*$-algebry

Spektrum jest próbą uogólnienia pojęcia wartości własnej i wektora własnego macierzy nad $\mathbb{C}$. Każda macierz nad $\mathbb{C}$ miała przynajmniej jedną wartość i wektor własny, gdyż jej wielomian charakterystyczny miał przynajmniej jeden pierwiastek. Nie jest to prawdą w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych, np. w przestrzeni Hilberta l^2 przekształcenie $(x_1, x_2, \ldots) \to (0, x_1, x_2, \ldots)$ nie ma wartości ani wektora własnego.

Definicja 2.2.1. Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką e i $x \in A$ będzie dowolnym elementem. Wówczas przez *spektrum elementu x* oznaczamy zbiór:

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall_{y \in A} (\lambda e - x) y \neq e\}.$$

Innymi słowy jest to zbiór tych liczb zespolonych λ, dla których $\lambda e - x$ jest nieodwracalne.

Uwaga 2.2.2. Zauważmy, że dla $A = M_{n \times n}(\mathbb{C})$ spektrum elementu x to dokładnie zbiór wartości własnych x.

Fakt 2.2.3. *Spektrum elementu $x \in B$ jest zawsze niepuste.*

Dowód. Zaszkicuję jedynie dowówd. Jeśli byłoby puste, to na całym $\mathbb{C}$ możemy zdefiniować funkcję

$$R(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}.$$

Ta funkcja znika do zera w nieskończoności, więc R jest ograniczoną funkcją $\mathbb{C} \to B$. Co więcej, można wykazać — podobnymi technikami jak ze zwykłymi funkcjami wymiernymi $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, że jest to funkcja holomorficzna i zachodzi dla niej twierdzenie Liouville'a, mówiące, że maksimum normy na obszarze funkcja holomorficzna przyjmuje na brzegu. Stąd R musi być równe zero, sprzeczność.

□

Fakt 2.2.4. *Dla każdego $\lambda \in \sigma(x)$ zachodzi $|\lambda| < \|x\|$. Innymi słowy, spektrum jest ograniczone.*

Dowód. Weźmy λ, że $|\lambda| > \|x\|$. Wówczas $\|\frac{x}{\lambda}\| < 1$ i szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^n}$ jest zbieżny bezwzględnie (przypomnijmy, że algebra jest przestrzenią Banacha). Ale wówczas mamy:

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^n}\Big) \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda e - x) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^n}\Big) \cdot (e - \frac{x}{\lambda}) = e.$$

Czyli $(\lambda e - x)$ jest odwracalne, czyli $\lambda \notin \sigma(x)$. □

Fakt 2.2.5. *$\sigma(x)$ jest domknięte.*

Dowód. Wykażemy, że $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ jest otwarte. Niech $\lambda \notin \sigma(x)$. Niech $z \in \mathbb{C}$ takie, że $|\lambda - z| < \|(\lambda e - x)^{-1}\|^{-1}$. Wówczas mamy:

$$\|e - (\lambda e - x)^{-1}(ze - x)\| = \|(\lambda e - x)^{-1}(\lambda - z)e\| < 1.$$

Czyli, podobnie jak w poprzednim dowodzie, dla $T = e - (\lambda e - x)^{-1}(ze - x)$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ jest zbieżny, czyli $(e - T)$ jest odwracalne. Ale $e - T = (\lambda e - x)^{-1}(ze - x)$, czyli $(ze - x)$ jest odwracalne, czyli $z \notin \sigma(x)$. □

Wniosek 2.2.6. $\sigma(x)$ jest więc niepuste i zwarte.

Definicja 2.2.7. *Promieniem spektralnym* elementu x algebry Banacha B nazywamy liczbę $r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$.

Wniosek 2.2.8. Udowodniliśmy więc w fakcie 2.2.4, że $r(x) \leqslant \|x\|$.

Poniższe twierdzenie pozostawiam bez dowodu, będzie ono użyte w późniejszych rozważaniach.

Twierdzenie 2.2.9 (Gelfand-Mazur)**.**

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

2.3. Spektrum przemiennej $\mathbb{C}^*$-algebry

Definicja 2.3.1. *Spektrum* przemiennej zespolonej algebry Banacha A będziemy nazywać zbiór wszystkich niezerowych homomorfizmów $h : A \to \mathbb{C}$. Homomorfizmy te zachowują operacje mnożenia i dodawania w algebrze A, jak i mnożenie przez skalar, oraz są ciągłe w sensie topologicznym. Spektrum oznaczamy przez $\hat{A}$.

Wniosek 2.3.2. Spektrum zawiera się w przestrzeni Banacha ciągłych operatorów liniowych $B \to \mathbb{C}$, gdy B potraktujemy jako przestrzeń Banacha, zapominając o mnożeniu. Jeśli B ma jedynkę, to każdy element spektrum ma normę 1.

Dowód. Niech h będzie elementem spektrum, $x \in A$ i $h(x) = a \in \mathbb{C}$. Załóżmy, że $|a| > \|x\|$. Wówczas, skoro h jest homomorfizmem, mamy $h(\frac{x}{a}) = 1$, czyli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$h\Big((\frac{x}{a})^n\Big) = 1.$$

Zauważmy, że $\|\frac{x}{a}\| < 1$, czyli $\frac{x^n}{a^n} \to 0$. To przeczy ciągłości h. Czyli h ma normę co najwyżej 1.

Z drugiej strony dla dowolnego $x \in A$ mamy $h(x) = h(1 \cdot x) = h(x) \cdot h(1)$. Jeśli h jest niezerowe, to dla pewnego x możemy skrócić $h(x)$ stronami i otrzymamy $h(1) = 1$. Czyli $\|h\| = 1$. $\square$

Wniosek 2.3.3. Jeśli A jest algebrą Banacha z jedynką, to w słabej z $*$ topologii (w przestrzeni ciągłych liniowych operatorów z A do $\mathbb{C}$) spektrum $\hat{A}$ jest zwarte.

Dowód. $\hat{A}$ zawiera się w kuli jednostkowej w przestrzeni A^*, która jest zwarta w słabej z $*$ topologii, na mocy twierdzenia Banacha-Alaoglu. Wystarczy więc wykazać domkniętość $\hat{A}$. Weźmy sieć $\omega_\alpha \in \hat{A}$ zbieżną do ω w słabej z $*$ topologii. Z definicji słabej z $*$ topologii oznacza to, że dla każdego $x \in A$ mamy $\omega_\alpha(x) \to \omega(x)$. Łatwo pokazać, korzystając z ciągłości operacji w $\mathbb{C}$, że ω będzie również homomorfizmem $A \to \mathbb{C}$. Co więcej, $\omega(1) = \lim \omega_\alpha(1) = 1$, czyli będzie to niezerowy homomorfizm, czyli $\omega \in \hat{A}$. $\square$

Powyższy wniosek jest bardzo ważny. Dlatego, od tego momentu rozważać będziemy jedynie A będące przemiennymi $\mathbb{C}^*$ algebrami z jedynką. Mówiąc o spektrum $\hat{A}$, będziemy myśleć o spektrum jako przestrzeni topologicznej z słabą z $*$ topologią. Pokażę teraz kilka faktów, część z nich pozostawię bez dowodu.

Fakt 2.3.4. *Spektrum przemiennej $\mathbb{C}^*$-algebry z jedynką A jest niepuste. Co więcej, dla każdego nieodwracalnego elementu $x \in A$ istnieje $\omega \in \hat{A}$ spełniające $\omega(x) = 0$.*

Fakt 2.3.5. *Każdy element $x \in A$ da się przedstawić jako $x_1 + ix_2$, gdzie $x_i = x_i^*$ dla $i = 1, 2$.*

Dowód. Łatwo sprawdzić, że $x_1 = \frac{1}{2}(x + x^*)$ i $x_2 = \frac{i}{2}(x^* - x)$ spełniają warunki faktu. $\square$

Fakt 2.3.6. *Dla każdego $\omega \in \hat{A}$ mamy $\omega(x^*) = \overline{\omega(x)}$.*

Dowód. Niech $\omega \in \hat{A}$. Zauważmy, że wystarczy wykazać następujący lemat: dla każdego $x \in A$, jeśli $x = x^*$ to $\omega(x) \in \mathbb{R}$. Jeśli udowodnimy lemat, to korzystając z faktu 2.3.5 mamy:

$$\omega(x^*) = \omega(x_1^* - ix_2^*) = \omega(x_1 - ix_2) = \omega(x_1) - i\omega(x_2) = \overline{\omega(x_1) + i\omega(x_2)} = \overline{\omega(x)}.$$

Pozostaje więc ograniczyć się do przypadku $x = x^*$.

Zauważmy, iż jako że A jest przemienną algebrą Banacha, definicja e^x dla $x \in A$ ma sens: definiujemy

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Ten szereg będzie zawsze zbieżny, bo szereg norm wyrazów będzie zbieżny (w $\mathbb{R}$), a A jest przestrzenią Banacha. Dodatkowo, z przemienności A wynika, że $e^x e^y = e^{x+y}$ — w szeregu bezwzględnie zbieżnym możemy zmieniać kolejność składników.

Ustalmy x spełniające $x = x^*$ i niech $u_t = e^{itx}$. Zauważmy, że

$$u_t^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((itx)^*)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-itx)^n}{n!} = e^{-itx}.$$

Czyli $u_t \cdot u_t^* = 1$, więc $\|u_t\|^2 = \|u_t u_t^*\| = 1$, czyli $\|u_t\| = 1$. ω jest homomorfizmem A w $\mathbb{C}$, ma normę 1, czyli
$$e^{t\ Re\ i\omega(x)} = e^{\ Re\ \omega(itx)} = |e^{\omega(itx)}| = |\omega(u_t)| \leqslant 1.$$
Czyli dla dowolnego t mamy $e^{tM} \leqslant 1$, gdzie $M = Re\ i\omega(x)$. To jest możliwe tylko jak $M = 0$, czyli $\omega(x) \in \mathbb{R}$. □

Zauważmy, że możemy zdefiniować następujące, naturalne, włożenie:

Definicja 2.3.7. *Włożeniem Gelfanda* będziemy nazywać funkcję $\gamma : A \to C(\hat{A})$ z algebry A w przestrzeń zespolonych funkcji ciągłych ograniczonych na spektrum $\hat{A}$ o następującej, naturalnej definicji: $\gamma(x)(\omega) = \omega(x)$.

Fakt 2.3.8. *Zachodzi* $\|\gamma(x)\| = r(x)$.

Dowód. Zgodnie z definicją, $\|\gamma(x)\| = \sup\{|\omega(x)| : \omega \in \hat{A}\}$. W homomorfiźmie $\omega \in \hat{A}$ element odwracalny nie może przejść na zero, więc jeśli $\lambda \notin \sigma(x)$, wówczas $\omega(\lambda e - x) \neq 0$, czyli $\omega(x) \neq \lambda$. Czyli $\{\omega(x) : \omega \in \hat{A}\} \subset \sigma(x)$.

Z drugiej strony, na mocy faktu 2.3.4, jeśli $\lambda \in \sigma(x)$, to istnieje $\omega \in \hat{A}$ spełniające $\omega(\lambda e - x) = 0$, czyli $\omega(x) = \lambda$. Czyli $\{\omega(x) : \omega \in \hat{A}\} = \sigma(x)$. □

Fakt 2.3.9. *To jest włożenie A w $C(\hat{A})$.*

Dowód. Oczywiście funkcja ewaluacji w określonym punkcie A jest dobrą funkcją ciągłą w przestrzeni ciągłych operatorów liniowych z A w $\mathbb{C}$, czyli $\gamma(x) \in C(\hat{A})$. Fakt, że jest to włożenie, czyli funkcja różnowartościowa, będzie wynikał z następnego, dużo silniejszego twierdzenia. □

Twierdzenie 2.3.10. Włożenie Gelfanda *jest $*$-izomorfizmem A na $C(\hat{A})$.*

Dowód. $*$-izomorfizm oznacza, że γ jest nie tylko izomorfizmem algebr Banacha; dodatkowo, zachowuje sprzężenia w $\mathbb{C}^*$-algebrach A i $C(\hat{A})$.

W fakcie 2.3.6 udowodniliśmy, że $\gamma(x^*) = \overline{\gamma(x)}$. Na mocy faktu 2.3.8 oraz twierdzenia 2.2.9 mamy:
$$\|\gamma(x)\| = r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{k\to\infty} \|x^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}}.$$
Załóżmy, że $x = x^*$. Wówczas $\|x\|^* = \|xx^*\| = \|x^2\|$. Ale jeśli $x = x^*$, to dla dowolnego n zachodzi $(x^n)^* = (x^*)^n = x^n$. Wnioskujemy stąd, że:
$$\|x^{2^k}\| = \|x^{2^{k-1}}\|^2 = \ldots = \|x\|^{2^k}.$$
Czyli, jeśli $x = x^*$, to
$$\|\gamma(x)\| = \lim_{k\to\infty} (\|x\|^{2^k})^{\frac{1}{2^k}} = \|x\|.$$
Biorąc teraz dowolne x, mamy:
$$\|\gamma(x)\|^2 = \|\gamma(x)^*\gamma(x)\| = \|\overline{\gamma(x)}\gamma(x)\| = \|\gamma(x^*x)\| = \|x^*x\| = \|x\|^2.$$

Udowodniliśmy więc, że γ jest izometrią z A w $C(\hat{A})$. Oczywiście, jako że $\hat{A}$ było zbiorem homomorfizmów, γ jest $*$-izomorfizmem: zachowuje wszystkie operacje. γ jest więc izometrycznym i izomorficznym włożeniem algebry A w $C(\hat{A})$, obrazem jest więc $\gamma(A)$ — domknięta podalgebra algebry $C(\hat{A})$. Zauważmy, że jeśli $\omega_1 \neq \omega_2$, to istnieje $x \in A$, że $\omega_1(x) \neq \omega_2(x)$, czyli $\gamma(x)(\omega_1) \neq \gamma(x)(\omega_2)$. Wobec tego γ rozdziela punkty w $C(\hat{A})$, czyli, na mocy twierdzenia Stone-Weiestrassa, jej obraz jest gęsty w $C(\hat{A})$. Jest również domknięty, czyli γ jest „na”. □

2.4. Uzwarcenie przestrzeni topologicznej

Przypomnijmy, co to jest uzwarcenie przestrzeni topologicznej.

Definicja 2.4.1. *Uzwarceniem* przestrzeni topologicznej X nazywamy zwartą przestrzeń $\bar{X}$, w której X jest gęstą podprzestrzenią. *Narostem* uzwarcenia nazywamy zwartą podprzestrzeń $\partial X = \bar{X} \setminus X$.

Przykład 2.4.2. Przestrzeń zwarta jest normalna. Lecz by X posiadało uzwarcenie, niekoniecznie musi być normalne — podprzestrzeń przestrzeni normalnej nie musi być normalna. Weźmy $X = \{a, b, c, d\}$ z topologią $\mathcal{T}_X = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\}$. Jest to przestrzeń normalna, gdyż każdy niepusty zbiór domknięty zawiera d, więc nie istnieją dwa rozłączne niepuste zbiory domknięte. Lecz podprzestrzeń $Y = \{a, b, c\}$ ma topologię $\mathcal{T}_Y = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$, która nie jest normalna, bo zbiory $\{a\}$ i $\{b\}$ są rozłączne, nierozdzielalne i domknięte.

Będziemy w poniższych rozważaniach zakładać, że przestrzeń X jest parazwarta i lokalnie zwarta. Zgodnie z faktem 1.3.5, X jest wówczas też normalna.

Przykład 2.4.3. Niech X będzie przestrzenią topologiczną normalną lokalnie zwartą. Spróbujmy stworzyć topologię przestrzeni $\bar{X} = X \cup \{\infty\}$, tak, by była zwarta i X było jej podprzestrzenią. Niech zbiorami otwartymi w $\bar{X}$ będą zbiory otwarte w X oraz dopełnienia zbiorów zwartych z X (wraz z ∞). Łatwo sprawdzić, że otrzymana w ten sposób przestrzeń jest uzwarceniem X. Nazywamy ją *uzwarceniem jednopunktowym* lub *uzwarceniem Aleksandrowa*. Intuicyjnie, to uzwarcenie polega na „dodaniu jednego punktu w nieskończoności, gdzie wszystkie ciągi (sieci) będą mogły zbiegać".

Przykład 2.4.4. Uzwarceniem Aleksandrowa przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest sfera S^n. W szczególności uzwarceniem Aleksandrowa prostej jest okrąg, a uzwarceniem Aleksandrowa płaszczyzny sfera.

Fakt 2.4.5. *Jeśli X jest lokalnie zwarte, to X jest otwarte w $\bar{X}$, czyli ∂X jest domknięte w $\bar{X}$, czyli zwarte.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że $X = \bigcup_{x \in X} U_x$, gdzie U_x jest otwartym otoczeniem x w X, że clU_x jest zwarte. □

2.5. Uzwarcanie przy pomocy $\mathbb{C}^*$-algebr

Zastosujmy teraz wyniki $\mathbb{C}^*$-algebr do uzwarceń przestrzeni topologicznych. Będziemy wychodzili trochę od drugiej strony niż w rozważaniach o $\mathbb{C}^*$-algebrach: mając daną przestrzeń zwartą, pokażemy, że jest ona izomorficzna ze spektrum przestrzeni funkcji ciągłych ograniczonych zespolonych na niej. Co więcej, dla przestrzeni lokalnie zwartych X, przez definiowanie podalgebry algebry $C(X)$ będziemy definiować uzwarcenia X — będą to spektra podalgebr.

Twierdzenie 2.5.1. *Niech X będzie przestrzenią zwartą. Niech $A = C(X)$ będzie $\mathbb{C}^*$-algebrą funkcji ciągłych zespolonych na X; te funkcje są oczywiście też ograniczone. Wówczas spektrum $\hat{A}$ jest homeomorficzne z X.*

Dowód. Naturalnym pomysłem jest rozważenie włożenia „ewaluacyjnego" X w $\hat{A}$. Oczywiście, funkcja $h_x : C(X) \to \mathbb{C}$, $h_x(f) = f(x)$ jest bardzo dobrym elementem $\hat{A}$. Jeśli $x \neq y$, to istnieje $f \in C(X)$, że $f(x) \neq f(y)$, czyli $h_x(f) \neq h_y(f)$, czyli jest to włożenie. Weźmy sieć x_α w X. Zauważmy, iż $x_\alpha \to x$ w X wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $f \in C(X)$ mamy $f(x_\alpha) \to f(x)$. Istotnie, w prawą stronę jest to oczywiste, zaś w lewą, jeśli x_α nie jest rezydualnie w pewnym otoczeniu otwartym U punktu x, to możemy z twierdzenia Tietzego skonstruować $f \in C(X)$, spełniającą $f(x) = 1$ i $f = 0$ poza U. Dla tej funkcji $f(x_\alpha)$ nie będzie zbiegać do $f(x)$.

Tłumacząc to na język $\hat{A}$ mamy, że $x_\alpha \to X$ w X wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $f \in C(X)$ mamy $h_{x_\alpha}(f) \to h_x(f)$, a to jest definicja zbieżności w słabej z $*$ topologii w $\hat{A}$. Czyli to włożenie jest homeomorfizmem na obraz.

Pozostaje pokazać „na". Na mocy twierdzenia 2.3.10, $C(X)$ jest izomorficzne z $C(\hat{A})$ włożeniem Gelfanda. X jest przestrzenią zwartą, włożoną w $\hat{A}$ — możemy przyjąć że X jest podprzestrzenią $\hat{A}$, $X \subset \hat{A}$. Niech $h \in \hat{A} \setminus X$. Wówczas, skoro X jest domknięte w $\hat{A}$ (funkcja ciągła z przestrzeni zwartej w zwartą jest domknięta), to istnieje $g \in C(\hat{A})$, że $g(x) \neq 0$ i $f = 0$ na X. Zgodnie z twierdzeniem 2.3.10 istnieje $f \in C(X)$, że $\gamma(f) = g$. Dla $x \in X$ mamy $g(x) = x(f) = f(x) = 0$, czyli $f = 0$ w $C(X)$. Ale takich funkcji $g \in C(\hat{A})$ jest sporo, np. $2g$. Sprzeczność. □

Wniosek 2.5.2. Jeśli dwie przestrzenie zwarte mają izomorficzne $\mathbb{C}^*$-algebry funkcji ciągłych zespolonych, to są homeomorficzne.

Dowód. Oczywiste, bo są homeomorficzne ze spektrum algebry swoich funkcji ciągłych. □

Definicja 2.5.3. Dla przestrzeni X przez $C_0(X)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich funkcji ciągłych zespolonych ograniczonych na X, które zbiegają do 0 w nieskończoności. To znaczy, dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty K, że $|f(x)| < \epsilon$ o ile $x \in X \setminus K$. Przez $C_1(X)$ będziemy oznaczać zbiór $\{f + z : f \in C_0(X), z \in \mathbb{C}\}$, czyli zbiór wszystkich funkcji mających granicę w nieskończoności.

Fakt 2.5.4. *Zauważmy, że $C_1(X) \subset C(X)$ jest $\mathbb{C}^*$-podalgebrą z jedynką. $C_0(X)$ jest $\mathbb{C}^*$-podalgebrą, ale ma jedynkę tylko jeśli X jest zwarte.*

Twierdzenie 2.5.5. *Niech X będzie przestrzenia Hausdorffa lokalnie zwartą. Niech $C_1(X) \subset A \subset C(X)$ będzie $\mathbb{C}^*$-podalgebrą. Wówczas istnieje uzwarcenie $\bar{X}$ przestrzeni X takie, że A jest $*$-izomorficzne z $C(\bar{X})$.*

Dowód. Pokazujemy, że możemy przyjąć $\bar{X} = \hat{A}$, z naturalnym włożeniem ewaluacji X w $\hat{A}$. Dowód jest bardzo podobny do dowodu twierdzenia 2.5.1, chcemy jedynie pokazać, że włożenie X jest nie tyle „na", co na zbiór gęsty w $\hat{A}$. Możemy to dowieść przez sprzeczność podobnie, jak w dowodzie twierdzenia 2.5.1: jeśli $x \in \bar{X} \setminus clX$, to możemy skonstruwać $g \in C(\bar{X})$ zerującą się na clX i spełniającą $g(x) \neq 0$. Ta jednak funkcja we włożeniu Gelfanda musiałaby pochodzić od funkcji zerowej w A, co prowadzi do sprzeczności, bo takich g jest wiele. □

Twierdzenie 2.5.6. *Niech X będzie przestrzenią lokalnie zwartą Hausdorffa i niech $C_1(X) \subset A_1 \subset A_2 \subset C(X)$ będa dwoma $\mathbb{C}^*$-podalgebrami. Niech $\bar{X}_1$ i $\bar{X}_2$ będa uzwarceniami odpowiadającymi tym $\mathbb{C}^*$-podalgebrom. Wówczas istnieje przedłużenie identyczności na X prowadzące z $\bar{X}_2$ na $\bar{X}_1$.*

Dowód. Zgodnie z dowodem twierdzenia 2.5.5, $\bar{X}_i \sim \hat{A}_i$ oraz X jest gęste w $\hat{A}_i$, w następującym sensie: $x \in X$ odpowiada homomorfizm ewaluacji elementu A_i w x. Zauważmy, że istnieje naturalna funkcja ciągła $\hat{A}_2 \to \hat{A}_1$, polegająca na obcięciu homomorfizmu o dziedzinie A_2 do podalgebry A_1. Ta funkcja jest identycznością na homomorfizmach ewaluacji elementów z X. Obrazem ciągłym przestrzeni zwartej $\hat{A}_2$ jest przestrzeń zwarta w $\hat{A}_1$, zawierająca zbiór gęsty X, czyli obraz musi być całą przestrzenią $\hat{A}_1$. Mamy więc szukane przedłużenie identyczności. $\square$

Przykład 2.5.7. Weżmy przestrzeń lokalnie zwartą Hausdorffa X i weźmy uzwarcenie odpowiadające $A = C_1(X)$. Zauważmy, że w $\hat{A}$ poza X dojdzie tylko jeden homomorfizm — przyporządkowujący funkcji jej granicę w nieskończoności. Czyli $\hat{A}$ będzie uzwarceniem Aleksandrowa X.

Przykład 2.5.8. Teraz spróbujmy skonstruować uzwarcenie skrajnie inne od uzwarcenia Aleksandrowa poprzedniego — intuicyjnie, każdemu ciągowi, jeśli tylko możemy, damy inną granicę w nieskończoności. Po prostu weźmy $A = C(X)$. To uzwarcenie nazywamy *uzwarceniem Stone'a - Čecha.* Ma ono szereg ciekawych własności, które wymienię poniżej.

Fakt 2.5.9.

Uzwarcenie Stone-Čecha jest „największym uzwarceniem", zgodnie z twierdzeniem 2.5.6, każde inne uzwarcenie jest ciągłym obrazem tego uzwarcenia w przekształceniu zachowującym X.

Fakt 2.5.10. *Każda funkcja ciągła na X przedłuża się na uzwarcenie Stone-Čecha.*

Dowód. Oczywiste, gdyż uzwarcenie Stone-Čecha pochodzi od spektrum algebry wszystkich funkcji ciągłych na X. $\square$

Fakt 2.5.11. *Rozważmy przeliczalny, nieskończony zbiór z topologią dyskretną — $\mathbb{Z}$. Wówczas rozłaczne ciągi uciekające do nieskończoności nie mogą mieć wspólnego punktu skupienia.*

Dowód. Funkcja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, przyjmująca 1 na elementach jednego z ciągów, a zero w pozostałych punktach, jest ciągła na $\mathbb{Z}$, więc przedłuża się na uzwarcenie Stone-Čecha. Funkcja ta musiałaby przyjmować zarówno 1 jak i 0 w wspólnym punkcie skupienia tych dwóch ciągów. $\square$

Rozdział 3

Wprowadzenie do struktur zgrubnych

W tym rozdziale omówimy podstawy struktur zgrubnych. Podam kilka faktów oraz konstrukcję topologicznej struktury zgrubnej. Dowody częściowo będę omijał, gdyż nie jest to tematem tej pracy.

W tym rozdziale zakładamy, że przestrzeń X jest przestrzenią Hausdorffa, parazwartą i lokalnie zwartą. Dla tej przestrzeni mamy dane pewne ustalone uzwarcenie $\bar{X}$. Tak jak poprzednio, przez $\partial X = \bar{X} \setminus X$ oznaczamy brzeg uzwarcenia $\bar{X}$. *Nieskończonością* będziemy nazywali zbiór $\bar{X} \times \bar{X} \setminus X \times X$.

3.1. Struktura zgrubna

Podam tutaj, w skrócie, podstawowe definicje i fakty dotyczące ogólnych struktur zgrubnych.

Definicja 3.1.1. Zbiór $A \subset X$ jest *relatywnie zwarty* jeśli clA jest zwarty w X.

Fakt 3.1.2. *A jest relatywnie zwarty wtedy i tylko wtedy gdy $clA \subset X$, gdzie domnkięcie bierzemy w uzwarceniu $\bar{X}$.*

Definicja 3.1.3. *Strukturą zgrubną* nad X nazywamy zbiór $\xi \subset 2^{X \times X}$ zawierający przekątną, zamknięty na odwrotności, podzbiory, złożenia i skończone sumy. Elementy struktury zgrubnej nazywamy *zbiorami kontrolowanymi.*

Jeśli $E \subset X \times X$, to przez $E[A]$ oznaczamy zbiór $\{x \in X : \exists_{y \in A} (x, y) \in E\}$. Przez E^{-1} oznaczamy zbiór $\{(y, x) : (x, y) \in E\}$.

Definicja 3.1.4. Zbiór $E \subset X \times X$ jest *właściwy* jeśli dla każdego $A \subset X$, jeśli A jest relatywnie zwarte, to $E[A]$ i $E^{-1}[A]$ jest relatywnie zwarte.

Definicja 3.1.5. Zbiór $B \subset X$ jest *ograniczony*, jeśli zbiór $B \times B$ jest kontrolowany.

Definicja 3.1.6. Struktura zgrubna jest *właściwa* jeśli jednym z jej elementów jest otoczenie diagonali oraz każdy zbiór ograniczony w X jest relatywnie zwarty.

Definicja 3.1.7. Struktura zgrubna $\mathcal{E}$ jest *spójna* jeśli dla każdych dwóch punktów $x, y \in X$ istnieje zbiór $E \in \mathcal{E}$ zawierający punkt (x, y).

3.2. Topologiczna struktura zgrubna

Postaramy się, temu danemu uzwarceniu $\bar{X}$, przypisać „naturalną” strukturę zgrubną na X. Zacznijmy od prostego faktu:

Fakt 3.2.1. *Zbiór $E \subset X \times X$ jest właściwy, wtedy i tylko wtedy gdy $clE \subset X \times X \cup \partial X \times \partial X$, gdzie domknięcie bierzemy w przestrzeni $\bar{X} \times \bar{X}$.*

Dowód. Dowiedziemy nie wprost w obie strony, czyli wykażemy że E nie jest właściwy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje punkt z jego domknięcia w $X \times \partial X \cup \partial X \times X$.

Wpierw załóżmy, że E nie jest właściwy. Czyli bez straty ogólności możemy założyć, że istnieje relatywnie zwarty $K \subset X$, że $E[K]$ nie jest relatywnie zwarty, czyli $x' \in cl\ E[K] \cap \partial X$. Wobec tego istnieje sieć (x'_α) w $E[K]$ zbieżna do x'. Z definicji $E[K]$, dla każdego x'_α istnieje $x_\alpha \in K$, że $(x_\alpha, x'_\alpha) \in E$. (x_α) to sieć w zbiorze zwartym $clK \subset X$, więc możemy z niej wybrać podsieć zbieżną do pewnego $x \in clK \subset X$. Ta podsieć, patrząc na nią w dwóch wymiarach (x_β, x'_β) zbiega w $\bar{X} \times \bar{X}$ do $(x, x') \in X \times \partial X$.

W drugą stronę, niech, bez straty ogólności, $(x, x') \in clE \cap X \times \partial X$. Istnieje więc sieć w E zbieżna do (x, x'). Na mocy lokalnej zwartości X, niech K będzie zwartym otoczeniem x. Wybierzmy z powyższej sieci podsieć zawartą w $K \times \bar{X}$: na mocy definicji zbieżności po prostu bierzemy elementy zbioru indeksów powyżej pewnego elementu. Nazwijmy nową sieć (x_α, x'_α). Wówczas $x'_\alpha \in E[K]$, czyli w $E[K]$ istnieje sieć zbieżna do x', czyli $x' \in clE[K]$, czyli nie jest on relatywnie zwarty. □

Twierdzenie 3.2.2. *Niech $E \subset X \times X$. Następujące warunki są równoważne:*

1. *$clE \setminus X \times X$ jest zawarty w przekątnej $\bar{X} \times \bar{X}$.*
2. *E jest właściwy i dla każdej sieci (x_α, y_α) w E, jeśli x_α zbiega do $x \in \partial X$, to y_α też zbiega do x.*
3. *E jest właściwy i dla każdego punktu $x \in \partial X$ i każdego otoczenia V punktu x w $\bar{X}$, istnieje otoczenie $U \subset V$ punktu x w $\bar{X}$, że $E \cap (U \times (X \setminus V)) = \emptyset$.*

Dowód. Wpierw udowodnijmy (1) $\Rightarrow$ (2). Na mocy faktu 3.2.1, E jest właściwy. Weźmy sieć (x_α, y_α) w E taką, że x_α zbiega do $x \in \partial X$. Załóżmy niewprost, że y_α nie zbiega do x, czyli istnieje otoczenie otwarte U punktu x, że dla każdego α istnieje $\beta \geqslant \alpha$, że $y_\beta \notin U$. Weźmy $B = \{\beta \in A : y_\beta \notin U\}$, gdzie A to zbiór indeksów naszej sieci. Weźmy podsieć naszej sieci, indeksowaną zbiorem B. Udowodnimy, że x_β zbiega do x. Niech V otoczenie x. $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ zbiegała do x, więc istnieje γ_1, powyżej której elementy x_α są w V. Ale elementy B są dowolnie wysoko w A, więc istnieje $\gamma_2 \geqslant \gamma_1$, że $\gamma_2 \in B$. Wobec tego dla każdego $\beta \geqslant \gamma_2$ mamy $x_\beta \in V$. Czyli $(x_\beta)_{\beta \in B}$ zbiega do x. Ale (y_β) jest siecią w $\bar{X} \setminus U$, co jest zbiorem domkniętym w przestrzeni zwartej, czyli zwartym. Wobec tego z tej sieci możemy wybrać podsieć zbieżną do pewnego y; jako że $x \in U$, to $y \neq x$. Wobec tego ta podsieć, w $\bar{X} \times \bar{X}$, zbiega do (x, y), co jest punktem poza diagonalą i poza $X \times X$, sprzeczność.

Dowód (2) $\Rightarrow$ (3) przeprowadzimy niewprost. Wobec tego załóżmy, że istnieje $x \in \partial X$ i jego otoczenie V, takie, że dla każdego otoczenia U punktu V istnieje punkt $(x_U, y_U) \in E \cap (U \times (X \setminus V))$. To jest oczywiście sieć z „naturalnym” porządkiem odwrotnej inkluzji na otoczeniach x. Ale wówczas x_U zbiega do x, czyli, na mocy (2), y_U też zbiega do x. Ale żaden element sieci y_U nie jest w otoczeniu V, sprzeczność.

By udowodnić (3) $\Rightarrow$ (1), weźmy $(x, y) \in clE \setminus X \times X$. Chcemy wykazać, że $x = y$. Na mocy lematu 3.2.1 zarówno x jak i y leżą w ∂X. Załóżmy, że $x \neq y$. Niech V_x i V_y będą rozłącznymi otoczeniami odpowiednio x i y. Ale wówczas dla dowolnego otoczenia $U \subset V_x$ punktu x mamy $(x, y) \in U \times V_y \subset U \times (X \setminus V_x)$, co stoi w sprzeczności z (3). □

Twierdzenie 3.2.3. *Zbiór $\mathcal{E}$ tych podzbiorów $X \times X$ spełniających równoważne warunki w twierdzeniu 3.2.2 tworzą właściwą spójną strukturę zgrubną na X.*

Dowód. Zauważmy, że warunek (1) jest niewrażliwy na branie podzbiorów, odwrotności i skończonych sum, wobec tego $\mathcal{E}$ jest zamknięty na te operacje. Z pomocą warunku (2) najłatwiej pokazać zamkniętość na produkty: niech $E = E' \circ E''$ i niech (x_α, z_α) będzie siecią w E taką, że x_α zbiega do $x \in \partial X$. Z definicji iloczynu istnieją y_α, że $(x_\alpha, y_\alpha) \in E'$ i $(y_\alpha, z_\alpha) \in E''$. Ale wówczas, jako że $E', E'' \in \mathcal{E}$, mamy z warunku (2) że $y_\alpha \to x$, więc i $z_\alpha \to x$. Iloczyn właściwych zbiorów jest właściwy, więc E spełnia warunek (2), czyli $E \in \mathcal{E}$.

Zwróćmy uwagę, że w $\mathcal{E}$ kontrolowany jest każdy zwarty podzbiór $E \subset X \times X$, gdyż jego domknięcie w $\bar{X} \times \bar{X}$ nie wychodzi poza $X \times X$, czyli spełnia warunek (1). Wobec tego każdy pojedynczy punkt $X \times X$ jest kontrolowany, czyli $\mathcal{E}$ jest spójny. Dodatkowo, z tego wynika, że jeśli B jest relatywnie zwarty, to $B \times B \in \mathcal{E}$. Weźmy $B \subset X$ który nie jest relatywnie zwarty i $b \in B$. Wówczas $(B \times B)[\{b\}] = B$, czyli $B \times B$ nie jest właściwy, czyli nie należy do $\mathcal{E}$.

Do końca dowodu zostało nam pokazać tylko to, że w $\mathcal{E}$ istnieje otoczenie diagonali. To dokończy dowód właściwości oraz udowodni, że w $\mathcal{E}$ jest wogóle diagonala $X \times X$. Weźmy $f, g : \bar{X} \times \bar{X} \to \mathbb{R}_+$ takie, że f znika (jest równe zero) tylko na przekątnej, a g tylko w nieskończoności. Oba wymagane zbiory są domknięte, więc z pomocą lematu Urysohna możemy zbudować takie funkcje. Weźmy zbiór

$$E = \{(x, y) \in X \times X : f(x, y) < g(x, y)\}.$$

Jest to zbiór otwarty (jest to $(f - g)^{-1}(-\infty, 0)$) i zawiera diagonalę $X \times X$. Dodatkowo, jeśli mamy w E sieć (x_α, y_α), że $x_\alpha \to x \in \partial X$, to z ciągłości $g(x_\alpha, y_\alpha) \to 0$, więc z warunku na E mamy $f(x_\alpha, y_\alpha) \to 0$, czyli $y_\alpha \to x$. Czyli E spełnia warunek (1), czyli $E \in \mathcal{E}$. □

Definicja 3.2.4. Tę strukturę zgrubną $\mathcal{E}$ nazywamy *topologiczną strukturą zgrubną*. Jej elementy czasem nazywa się *ciągle kontrolowanymi* przez uzwarcenie $\bar{X}$, a strukturę zgrubną *strukturą zgrubną zbiorów ciągle kontrolowanych.*

Przykład 3.2.5. Zgrubną strukturą topologiczną dla uzwarcenia jednopunktowego jest niedyskretna struktura zgrubna.

Dowód. Zgodnie z definicją, niedyskretna struktura zgrubna składa się tylko z właściwych podzbiorów w $X \times X$. $\mathcal{E}$ również, więc wystarczy pokazać że w uzwarceniu jednopunktowym wszystkie podzbiory właściwe spełniają warunki twierdzenia 3.2.2. Spójrzmy na warunek (1). Zgodnie z lematem 3.2.1, domknięcie zbioru właściwego siedzi w $X \times X \cup \partial X \times \partial X$. Ale $\partial X \times \partial X = \{(\infty, \infty)\}$, tam nie ma nic poza diagonalą, czyli zbiór właściwy spełnia (1). □

Przykład 3.2.6. Zgrubną struktura topologiczną dla uzwarcenia Stone-Čecha przestrzeni dyskretnej X jest dyskretna struktura zgrubna.

Dowód. Dyskretna struktura zgrubna jest najmniejszą spójną strukturą zgrubną, więc na pewno zawiera się w topologicznej strukturze zgrubnej. Potrzebujemy wykazać, że jeśli zbiór E ma nieskończenie wiele punktów poza przekątną, to nie jest ciągle kontrolowany.

Jeśli mamy nieskończenie wiele punktów poza przekątną, możemy wybrać z nich nieskończenie wiele tak, by rzuty tych punktów na obie osie były rozłączne, tj. możemy wybrać różne punkty (x_n, y_n) tak, by $x_i \neq y_j$. Istotnie, jeśli dla jakiegoś x w naszym zbiorze E zbiór $E \cap \{x\} \times X$ jest nieskończony, to bierzemy wszystkie takie elementy (poza ew. (x, x)). Jeśli dla każdego x to jest skończone i, symetrycznie, dla każdego y zbiór $E \cap X \times \{y\}$ jest skończony, możemy wybierać punkty po kolei przez indukcję: wybierając dowolny punkt, „eliminujemy” tylko skończenie wiele innych, czyli dalej możemy wybierać.

Mamy więc jakiś ciąg różnych punktów (x_n, y_n) w E taki, że $x_i \neq y_j$. X ma strukturę dyskretną, więc funkcja $f : X \to [0,1]$, gdzie $f(x) = 1$ wtedy i tylko wtedy gdy $x = x_i$ dla pewnego i, zaś $f(x) = 0$ w przeciwnym przypadku, jest ciągła. Z własności uzwarcenia Stone-Čecha, f się rozrzesza do funkcji ciągłej na $\bar{X}$. Wobec tego funkcja ciągła $g(x,y) = f(x) - f(y)$ jest ciągła na $\bar{X} \times \bar{X}$, znika ona na przekątnej i $g(x_n, y_n) = 1$. W ciągu (x_n, y_n), jako że $\bar{X} \times \bar{X}$ jest zwarta, można wybrać podciąg zbieżny. Podciąg ten nie może zbiegać do żadnego punktu $X \times X$, bo ciąg miał różne elementy, a X miało topologię dyskretną. Wobec tego zbiega do punktu w nieskończoności, z ciągłości g w tym punkcie g przyjmuje wartość 1, czyli nie jest to na przekątnej, czyli E nie spełnia warunku (1) twierdzenia 3.2.2. □

Udowodnijmy teraz twierdzenie charakteryzujące zgrubne przekształcenia dla uzwarceń metryzowalnych, czyli, zgodnie z wnioskiem 1.1.6, spełniających drugi aksjomat przeliczalności.

Twierdzenie 3.2.7. *Niech X i Y będą lokalnie zwartymi przestrzeniami Hausdorffa, wraz z metryzowalnymi uzwarceniami $\bar{X}$ i $\bar{Y}$. Wówczas przekształcenie ciągłe i właściwe $f : X \to Y$ jest zgrubne (w sensie zgrubnych struktur topologicznych) wtedy i tylko wtedy gdy rozszerza się do ciągłego przekształcenia $\bar{X} \to \bar{Y}$.*

Dowód. Przypomnijmy, że przekształcenie jest zgrubne wtedy i tylko wtedy gdy jest właściwe i bornologiczne. Przekształcenie jest właściwe, jeśli przeciwobraz zbioru ograniczonego jest ograniczony. Przekształcenie jest bornologiczne, jeśli dla każdego kontrolowanego $E \subset X \times X$ zbiór $(f \times f)(E)$ jest kontrolowanym podzbiorem $Y \times Y$.

Wpierw załóżmy, że f przedłuża się do ciągłej funkcji $\bar{X} \to \bar{Y}$. Chcemy wykazać, że f jest bornologiczna. Weźmy więc ciągle kontrolowany $E \subset X \times X$ i chcemy wykazać że $E' = (f \times f)(E) \subset Y \times Y$ jest ciągle kontrolowany. Skorzystajmy z warunku (1) twierdzenia 3.2.2. Weźmy sieć $(f(x_\alpha), f(y_\alpha))$ w E', zbieżną do (x', y') i niech $x' \in \partial Y$. Chcemy wykazać, że $y' = x'$, wówczas warunek (1) będzie spełniony, bo domknięcię zbioru to zbiór granic sieci. $\bar{X}$ jest zwarte, więc, przechodząc do podsieci zbieżnej, możemy założyć że $x_\alpha \to x$ i $y_\alpha \to y$. Wówczas, z ciągłości przedłużenia f mamy $f(x) = x'$ i $f(y) = y'$. Skoro $x' \in \partial Y$, to $x \in \partial X$. Dla zbioru E zachodzi warunek (1) twierdzenia 3.2.2, czyli $x = y$, czyli $x' = f(x) = f(y) = y'$. Zauważmy, że tu nie korzystaliśmy nigdzie z metryzowalności uzwarceń.

W drugą stronę, załóżmy że f jest zgrubna, chcemy przedłużyć ją ciągle na całe $\bar{X}$. Weźmy $x \in \partial X$ i ciąg $x_n \in X$ zbieżny do x. Możemy skonstruować ciąg (a nie tylko sieć), gdyż $\bar{X}$ jest metryzowalna: za x_n bierzemy np. dowolny element $B(x, \frac{1}{n}) \cap X$ (X jest gęste w $\bar{X}$). Wówczas $f(x_n)$ jest ciągiem w $\bar{Y}$, możemy więc wybrać podciąg zbieżny, powiedzmy do y, i przyjąć $f(x) = y$.

Trzeba wpierw udowodnić, że jest to poprawna definicja. Powiedzmy, że $x_n \to x$ i $x'_n \to x$, są to już podciągi takie, że $f(x_n) \to y$ i $f(x'_n) \to y'$. Musimy wykazać, że $y = y'$. Zauważmy, że jeśli $E = \{(x_n, x'_n) : n \in \mathbb{N}\}$, to $clE = E \cup \{(x,x)\}$, czyli E jest ciągle kontrolowany. f była zgrubna, czyli też bornologiczna, czyli $f(E)$ jest ciągle kontrolowany w $Y \times Y$. Zauważmy, że $y \in \partial Y$. Istotnie, jeśliby $y \in Y$, to niech U będzie zwartym, czyli ograniczonym, otoczeniem y w Y, to, jako że f jest właściwa, $f^{-1}(U)$ musiałoby być ograniczone w X, czyli relatywnie zwarte (bo f jest właściwa). Ale ogon ciągu x_n należy do $f^{-1}(U)$, czyli x należy do domknięcia, czyli $f^{-1}(U)$ nie jest relatywnie zwarty. Zauważmy, że $(y, y') \in clf(E)$. Ale $f(E)$ jest ciągle kontrolowany, a $y \in \partial Y$, czyli, na mocy warunku (1) twierdzenia 3.2.2 musi być $y = y'$.

Czyli funkcja jest dobrze określona, trzeba dowieść że jest ciągła. $\bar{X}$ i $\bar{Y}$ są metryczne, więc wystarczy pokazać ciągową definicję ciągłości. Zwróćmy uwagę jak definiwaliśmy f na ∂X: poprzez granicę ciągów, czyli f jako funkcja $X \cup \{x\} \to Y \cup \{f(x)\}$ jest ciągła, dla każdego $x \in \partial X$. Weźmy $x \in \bar{X}$, $\epsilon > 0$ i załóżmy przez sprzeczność, że istnieje ciąg $x_n \to x$, że $d(f(x), f(x_n)) > \epsilon$. Z gęstości X w $\bar{X}$ i ciągłości już wykazanej, można dla każdego x_n wybrać $x'_n \in X$, że $d(f(x_n), f(x'_n)) < \frac{\epsilon}{2}$ i $d(x_n, x'_n) < \frac{1}{2^n}$ Wobec tego $x'_n \to x$, ale $d(f(x'_n), f(x)) > \frac{\epsilon}{2}$, sprzeczność. □

Przykład 3.2.8. Pokażemy, że założenie o metryzowalności uzwarcenia jest istotne w powyższym twierdzeniu. Ideą przykładu jest to, że gdy uzwarcenie jest „duże", czyli niemetryzowalne, może się nie dać znaleźć zbioru, który ma tylko jeden punkt skupienia w nieskończoności; a taki zbiór (był to ciąg zbieżny do x) wykorzystywaliśmy by znaleźć $f(x)$.

Niech $X = Y = \mathbb{Z}$. Niech $\bar{Y}$ będzie uzwarceniem Stone-Čecha przestrzeni Y, a $\bar{X}$ podobnie, przy czym utożsamiamy jakieś dwa punkty, jeden z domknięcia $\mathbb{Z}_+$, drugi z domknięcia $\mathbb{Z}_-$. Powiedzmy, że zlepiamy x z x'. Na mocy przykładu 3.2.6, zgrubna struktura topologiczna na Y jest dyskretna. Pokażemy, że topologiczna struktura zgrubna na X też jest dyskretna. Wówczas identyczność $X \to Y$ będzie zgrubna (bo struktury zgrubne są takie same), ale nie będzie się dało rozszerzyć jej do funkcji ciągłej, bo nie będzie wiadomo co zrobić z tym zlepionym punktem.

By wykazać, że struktura zgrubna na X jest dyskretna, przeprowadźmy podobne rozumowanie jak w przykładzie 3.2.6. Jeśli $E \subset X \times X$ jest kontrolowany i posiada nieskończenie wiele punktów poza diagonalą, to posiada ciąg (x_n, y_n), gdzie $x_i \neq y_j$, zbieżny do jakiegoś punktu w $\partial X \times \partial X$. Jak argumentowaliśmy poprzednio, w uzwarceniu Stone-Čecha granice rozłącznych ciągów w nieskończoności są różne, czyli to może zbiegać tylko do (x, x') lub (x', x). Załóżmy bez straty ogólności że zbiega do (x, x'). Weźmy otoczenie domknięte K punktu (x, x') nieprzecinające diagonali i niezawierające punktu (x', x) i załóżmy, że nasz ciąg leży w K — od pewnego miejsca musi być w K. No dobrze, ale ciągi (x_{2n}, y_{2n}) i (x_{2n+1}, y_{2n+1}) są rozłączne, więc, z własności uzwarcenia Stone-Čecha, co najwyżej jeden z nich może mieć punkt skupienia w (x, x'), a to jedyny możliwy punkt skupienia, sprzeczność. Czyli topologiczna struktura zgrubna na X też jest dyskretna.

Rozdział 4

Uzwarcenie Higsona

W poprzednim rozdziale pokazaliśmy „naturalną” strukturę zgrubną, przyporządkowaną jakiemuś uzwarceniu przestrzeni X, czyli mądrze mówiąc, pokazaliśmy funktor t z kategorii przestrzeni z uzwarceniem w kategorię przestrzeni z właściwą strukturą zgrubną.

Naturalne pytanie się nasuwa, czy można tę operację odwrócić, czyli czy mając daną strukturę zgrubną na X potrafimy skonstruować uzwarcenie, dla którego ta struktura jest topologiczną strukturą zgrubną.

Do pewnego stopnia nam się to uda. Niestety, pokażemy też, że nie zawsze jest to możliwe. Podobnie jak w poprzednim rozdziale, zakładamy że X jest parazwartą lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa.

4.1. Wprowadzenie

Zanim to jednak zrobimy, zdefiniujmy jakiś częściowy porządek na uzwarceniach i na strukturach zgrubnych.

Definicja 4.1.1. Niech $\bar{X}$ i $\bar{Y}$ będą uzwarceniami X. Będziemy pisać $\bar{X} \leqslant \bar{Y}$, jeśli identyczność na X przedłuża się do ciągłej surjekcji (czyli funkcji „na”) $f : \bar{Y} \to \bar{X}$. Innymi słowy, uzwarcenie $\bar{X}$ powstaje z uzwarcenia $\bar{Y}$ przez zlepienie jakiś punktów.

Przykład 4.1.2. Uzwarcenie jednopunktowe przestrzeni niezwartej jest najmniejszym uzwarceniem, funkcja utożsamiająca wszystkie punkty narostu jest ciągła.

Przykład 4.1.3. Uzwarcenie Stone-Čecha jest najwiekszym uzwarceniem. Wynika to z rozważań o C^*-algebrach; uzwarcenie Stone-Čecha odpowiada wszystkim funkcjom ciągłym i ograniczonym na X.

Definicja 4.1.4. Niech $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2$ będą strukturami zgrubnymi na przestrzeni X. Wówczas mówimy, że $\mathcal{E}_2$ jest *zgrubniejsza* od $\mathcal{E}_1$, oznaczamy to $\mathcal{E}_1 \leqslant \mathcal{E}_2$, jeśli $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$. Innymi słowy, w $\mathcal{E}_2$ więcej zbiorów jest kontrolowanych.

Przykład 4.1.5. $2^{X \times X}$ jest najzgrubniejszą strukturą zgrubną na X.

Przykład 4.1.6. $2^{\{(x,x):x \in X\}}$ jest najmniej zgrubną strukturą zgrubną na X.

Przykład 4.1.7. Niedyskretna struktura zgrubna jest najzgrubniejszą strukturą właściwą na X.

Przykład 4.1.8. Dyskretna struktura zgrubna jest najmniej zgrubną strukturą spójną na X.

Definicja 4.1.9. Niech X będzie właściwą przestrzenią zgrubną. Uzwarcenie $\bar{X}$ nazwiemy *zgrubnym uzwarceniem*, jeśli $t\bar{X}$ jest zgrubniejsza od oryginalnej struktury zgrubnej.

Przykład 4.1.10. Niedyskretna struktura zgrubna jest najzgrubniejszą właściwą strukturą zgrubną, wobec tego uzwarcenie jednopunktowe jest zawsze zgrubne. Przypomnijmy, że topologiczna struktura zgrubna dla uzwarcenia jednopunktowego to właście niedyskretna struktura zgrubna.

4.2. Konstrukcja uzwarcenia Higsona

Spróbujmy teraz skonstruować uzwarcenie odpowiadające jakiejś właściwej strutkurze zgrubnej.

Definicja 4.2.1. Niech X będzie właściwą przestrzenią zgrubną, czyli przestrzenią parazwartą Hausdorffa wraz z właściwą strukturą zgrubną. Niech $f : X \to \mathbb{C}$ będzie ciągła i ograniczona. Niech $df(x,y) = f(y) - f(x)$, $df : X \times X \to \mathbb{C}$. Mówimy, że f jest *funkcją Higsona* jeśli dla każdego kontrolowanego E, funkcja df obcięta do E znika w nieskończoności, czyli $df \in C_0(E)$. Przez „znikanie w nieskończoności" rozumiemy, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty K, że $|df(x,y)| < \epsilon$ dla $(x,y) \in E \setminus K$. Zbiór funkcji Higsona oznaczamy $C_h(X)$.

Fakt 4.2.2. *Funkcje Higsona na właściwej przestrzeni zgrubnej X tworzą przemienną $\mathbb{C}^*$-algebrę z jedynką, podalgebrę $\mathbb{C}^*$-algebry funkcji ciągłych ograniczonych, zawierającą $C_1(X)$. Operacjami jest punktowe mnożenie, dodawanie i sprzężenie.*

Dowód. Oczywiście funkcje Higsona są podzbiorem $\mathbb{C}^*$-algebry wszystkich funkcji ciągłych ograniczonych na X, czyli, by to była $\mathbb{C}^*$-algebra, musimy wykazać zamkniętość na dodawanie, sprzężenie i mnożenie oraz to, że funkcja stale równa jeden jest funkcją Higsona. Wszystko poza mnożeniem jest oczywiste, gdyż $d(f+g) = df + dg$ i $d(\bar{f}) = \bar{df}$ oraz $d1 = 0$. Zauważmy, że:

$$d(fg)(x,y) = f(y)g(y) - f(x)g(x) = (f(y) - f(x))g(x) + (g(y) - g(x))f(y) =$$

$$= df(x,y)g(x) + dg(x,y)f(y).$$

Wobec tego, jeśli na E zachodzi $df \to 0$ i $dg \to 0$ w nieskończoności, a f i g są ograniczone, to $d(fg) \to 0$. W oczywisty sposób wszystkie elementy $C_1(X)$ należą do $C_h(X)$. □

Wniosek 4.2.3. Wobec tego, na mocy uwagi 2.5.5, istnieje uzwarcenie przestrzeni X dla której $C_h(X)$ jest algebrą funkcji ciągłych i ograniczonych w $\mathbb{C}$.

Definicja 4.2.4. To uzwarcenie będziemy nazywać *uzwarceniem Higsona* i oznaczymy hX. Narost tego uzwarcenia, czyli $hX \setminus X$, oznaczymy νX i będziemy nazywać *koroną Higsona*. Innymi słowy, h jest funktorem z kategorii przestrzeni z właściwą strukturą zgrubną w kategorię przestrzeni z uzwarceniem.

4.3. Przykłady uzwarceń Higsona

Pytanie teraz brzmi: czy $X = htX$ dla przestrzeni z uzwarceniem X? Czy $X = thX$ dla właściwej struktury zgrubnej na X?

Przykład 4.3.1. Uzwarcenie Higsona dyskretnej struktury zgrubnej na przestrzeni dyskretnej X jest uzwarceniem Stone-Čecha.

Dowód. Proste. Jeśli E jest zbiorem kontrolowanym i (x_n, y_n) ucieka do nieskończoności w E, to ucieka po diagonali — w E jest tylko skończenie wiele punktów poza diagonalą. Czyli df znika w nieskończoności dla dowolnej ciągłej f, czyli $C(hX) = C(X)$, czyli jest to uzwarcenie Stone-Čecha. □

Uwaga 4.3.2. Rozważmy uzwarcenie z przykładu 3.2.8. Topologiczną strukturą zgrubną jest struktura dyskretna, ale uzwarcenie Higsona dla topologicznej struktury zgrubnej jest pełnym uzwarceniem Stone-Čecha. Mamy więc przykład, że czasem $X < htX$: nie można przedłużyć identyczności do przekształcenia ciągłego z „zlepionego" Stone-Čecha do pełnego.

Przykład 4.3.3. Uzwarcenie Higsona niedyskretnej struktury zgrubnej na $X = \omega$ z topologią dyskretną to uzwarcenie jednopunktowe.

Dowód. Niech $X \ni x_n \to x \in \partial hX$ i $X \ni y_n \to y \in \partial hX$ i $x \neq y$. Żaden punkt w żadnym ciągu nie pojawia się nieskończenie wiele razy, możemy więc założyć że $x_i \neq y_j$, $x_i \neq x_j$, $y_i \neq y_j$: bierzemy x_1 i wyrzucamy wszystkie wystąpienia x_1 z obu ciągów, i naprzemiennie w ten sposób wybieramy po elemencie z każdego ciągu. Wówczas $\{(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\}$ jest kontrolowany: jeśli K jest zwarty, to tylko skończenie wiele elementów x_n jest w K, czyli $E[K]$ jest skończony, czyli zwarty. Wobec tego dla $f \in C(hX)$ mamy $f(x_n) - f(y_n) \to 0$, czyli $f(x) = f(y)$, czyli, z dowolności wyboru f, $x = y$. □

Wniosek 4.3.4. Uzwarcenie jednopunktowe oraz struktura niedyskretna na ω, jak też uzwarcenie Stone-Čecha i struktura dyskretna zachowują się „porządnie", tj. $thX = X$ oraz $htX = X$.

Przykład 4.3.5. Niech $X = \omega$ z topologią dyskretną. Niech

$$\mathcal{E} = \{E \subset X \times X : \sup_{x \in X} \max(E^x, E_x) < \infty\}.$$

Łatwo sprawdzić, że jest to struktura zgrubna, nazywamy ją *uniwersalną strukturą ograniczoną na X*. Wówczas hX będzie uzwarceniem jednopunktowym.

Dowód. Dowód taki sam jak w przypadku przestrzeni niedyskretnej: możemy urozłącznić ciągi zbiegające do nieskończoności, tworzą one zbiór kontrolowany, więc w nieskończoności $f(x) = f(y)$, czyli zbiegają do tego samego punktu. □

Uwaga 4.3.6. Uniwersalna struktura ograniczona jest istotnie mniej zgrubna od struktury niedyskretnej, w związku z tym jest to przykład, że możliwe jest $X < thX$.

4.4. Własności uzwarcenia Higsona

Pokazaliśmy kilka przykładów korony Higsona. Pokazaliśmy, że możliwe jest $X = htX$ oraz $X = thX$, jak i $X < htX$ oraz $X < thX$. Udowodnimy teraz, że to jedyne możliwe przypadki i pokażemy pewną charakteryzację, kiedy możemy spodziewać się równości.

Fakt 4.4.1. *Jeśli X i Y są przestrzeniami z uzwarceniami $\bar{X}$ i $\bar{Y}$ i $\bar{X} \leqslant \bar{Y}$, to $tX \geqslant tY$.*

Dowód. Oczywiste. Jeśli w $\bar{X}$ powstaje z $\bar{Y}$ przez pozlepianie kilku punktów w nieskończoności, to jeśli zbiór $E \subset X \times X$ spełnia warunek (1) twierdzenia 3.2.2 dla uzwarcenia $\bar{Y}$, to tym bardziej spełnia go dla $\bar{X}$. □

Fakt 4.4.2. *Jeśli X i Y są przestrzeniami z właściwą strukturą zgrubną i $X \leqslant Y$, to $hX \geqslant hY$.*

Dowód. Też oczywiste. Mniejsza struktura zgrubna, to mniej warunków na funkcje Higsona, czyli jest ich więcej, czyli $C(hY) \subset C(hX)$, czyli możemy zastosować twierdzenie 2.5.6. $\square$

Fakt 4.4.3. *Niech Y będzie przestrzenią z uzwarceniem $\bar{Y}$. Wówczas $Y \leqslant htY$.*

Dowód. Na mocy twierdzenia 2.5.6 wystarczy wykazać, że $C(\bar{Y})$ zanurza się w $C(htY)$, czyli że każda funkcja ciągła na $\bar{Y}$ jest funkcją Higsona. Weźmy E kontrolowany w topologicznej strukturze zgrubnej i (x_n, y_n) zbiegający do nieskończoności w E. Ale E spełnia warunek (1) twierdzenia 3.2.2, czyli granice x_n i y_n są te same, czyli w granicy $df = 0$ dla dowolnej ciągłej f na $\bar{Y}$. Czyli f jest Higsona. $\square$

Twierdzenie 4.4.4. *Uzwarcenie Higsona hX właściwej przestrzeni zgrubnej X jest zgrubne. Co więcej, jest uniwersalnym uzwarceniem zgrubnym w następującym sensie: dla każdego innego uzwarcenia zgrubnego $\bar{X}$ istnieje rozszerzenie identyczności do ciągłej surjekcji hX na $\bar{X}$. Innymi słowy, $X \leqslant thX$.*

Dowód. By wykazać, że uzwarcenie Higsona jest zgrubne, potrzebujemy pokazać, że każdy zbiór kontrolowany E oryginalnej struktury zgrubnej jest też kontrolowany w thX. Będziemy chcieli wykazać warunek (1) twierdzenia 3.2.2 dla zbioru E. Niech (x_α, y_α) będzie siecią w E i niech x_α ucieka do nieskończoności (czyli dla każdego zbioru zwartego K istnieje α że dla każdego $\beta \geqslant \alpha$ mamy $x_\beta \notin K$). Z właściwości zbioru E (oryginalna struktura zgrubna jest właściwa), y_α również ucieka do nieskończoności. Istotnie, jeśliby y_α dowolnie wysoko w sieci przebywał w zbiorze zwartym K, to biorąc $B = \{\alpha \in A : y_\alpha \in K\}$ tworzymy podsieć i $\{x_\alpha\}_{\alpha \in B} \subset E[K]$, ale podsieć $\{x_\alpha\}_{\alpha \in B}$ ucieka też do nieskończoności, czyli $E[K]$ nie jest relatywnie zwarty, sprzeczność z właściwością E.

Skoro x_α i y_α uciekają do nieskończoności i jest to sieć w E, to $df(x_\alpha, y_\alpha) \to 0$ dla dowolnej funkcji Higsona f. Wobec tego, jeśliby $x_\alpha \to x$ i $y_\alpha \to y$ w hX, to dla każdej funkcji Higsona $f(x) = f(y)$. $C_h(X)$ to wszystkie funkcje ciągłę na hX, czyli $x = y$. Czyli E spełnia warunek (1) twierdzenia 3.2.2, czyli jest kontrolowany w thX.

Teraz weźmy dowolne zgrubne uzwarcenie $\bar{X}$. Niech f będzie funkcją ciągłą na $\bar{X}$, wobec tego df znika na diagonali i jest ciągłę. Niech E będzie kontrolowany w oryginalnej strukturze zgrubnej; $\bar{X}$ było zgrubne, czyli E jest też kontrolowane w $t\bar{X}$. Ale, zgodnie z warunkiem (1) twierdzenia 3.2.2, clE poza $X \times X$ zawiera tylko punkty z diagonali $\bar{X} \times \bar{X}$, czyli df obcięte do E znika w nieskończoności, czyli f jest funkcją Higsona. Pokazaliśmy więc włożenie C^*-algebr $G : C(\bar{X}) \to C(hX)$, zachowujące zachowanie funkcji na X. Wobec tego, z twierdzenie 2.5.6, istnieje przedłużenie identyczności, ciągła surjekcja $hX \to \bar{X}$, czyli to o co nam chodzi. $\square$

Wniosek 4.4.5. Dla dowolnej przestrzeni z uzwarceniem X zachodzi $tX = thtX$. Dla dowolnej przestrzeni z właściwą struktrą zgrubną Y zachodzi $hY = hthY$.

Dowód. Wiemy, że $(tX) \leqslant th(tX)$. Ale też $X \leqslant htX$, na mocy faktów wcześniejszych, $tX \geqslant t(htX)$, czyli mamy równość. Drugi dowód przebiega analogicznie, potrzeba jeszcze zauważyć, że istnieje suriekcji w obie strony dwóch przestrzeni zwartych, zachowujących wspólny zbiór gęsty (X) implikuje homeomorficzność przestrzeni zwartych. $\square$

Uwaga 4.4.6. Spójrzmy na nasze negatywne przykłady. W związku z tym uzwarcenie Stone-Čecha ze zlepionym jednym punktem (przykład 3.2.8) nie jest uzwarceniem Higsona dla żadnej właściwej struktury zgrubnej, zaś uniwersalna struktura ograniczona nie jest topologiczną strukturą zgrubną dla żadnego uzwarcenia.

Przykład 4.4.7. Niech (X, d) będzie właściwą przestrzenią metryczną (czyli domknięte ograniczone są zawsze zwarte). Wówczas ograniczona struktura zgrubna na X spełnia $X = thX$.

Dowód. Wiemy, że $X \leqslant thX$, musimy wykazać w drugą stronę, wystarczy że wykażemy nie wprost: jeśli E nie jest kontrolowane w sposób ograniczony, to nie jest też kontrolowane ciągle przez hX.

E nie jest ciągle kontrolowane, weźmy więc w nim ciąg taki, że $d(x_n, y_n) > 2n + 1$. Przynajmniej jeden z tych ciągów musi zbiegać do nieskończoności, skoro E jest właściwy, to oba ciągi muszą zbiegać do nieskończoności. Możemy je przerzedzić: załóżmy, że x_{n+1} jest odległy o conajmniej $2(n + 1)$ od punktów x_i i y_i dla $i < n + 1$. Zdefiniujmy

$$f(x) = \max\Big(0, 1 - \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{d(x, x_n)}{n}\Big).$$

Wyrażenie pod inf dla conajwyżej jednego n będzie mniejsze niż 1, z warunków które obraliśmy na x_n. Czyli $f(x_n) = 1$ i $f(y_n) = 0$, czyli x_n i y_n zbiegają do różnych punktów w νX. Czyli E nie spełnia warunku (1) twierdzenia 3.2.2, czyli nie jest ciągle kontrolowane przez hX. □

Fakt 4.4.8. *Jeśli X jest lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa i $\bar{X}$ jest uzwarceniem metryzowalnym, to $X = htX$.*

Dowód. Wiemy, że $X \leqslant htX$. Musimy wykazać w drugą stroną, czyli że każda funkcja ciągła Higsona przedłuża się ciągle do funkcji ciągłęj na $\bar{X}$. Dowodzimy dalej tak samo jak w twierdzeniu 3.2.7. Niech $x_n \to x \in \partial X$. Za $f(x)$ przyjmujemy punkt skupienia $f(x_n)$. Jeśli dwa ciągi x_n i x'_n są takie, że $f(x_n)$ i $f(x'_n)$ są zbieżne, to, jako że f jest Higsona, $f(x_n) - f(x'_n) \to 0$. Czyli jest to poprawna definicja; pozostałe szczegóły są analogiczne do dowodu twierdzenia 3.2.7. □

4.5. Uniwesalność korony Higsona

Skonstruowaliśmy hX dla przestrzeni z właściwą strukturą zgrubną. Pokażemy teraz dość niesamowitą rzecz: νX, czyli narost uzwarcenia hX można zdefiniować dla dowolnej struktury zgrubnej, mimo, że wtedy $C_h(X)$ nie musi być C^*-algebrą i nie musi istnieć uzwarcenie hX.

Fakt 4.5.1. *Niech X będzie właściwą przestrzenią zgrubną. Wówczas $C(\nu X)$ jest izomorficzne z $\frac{C_h(X)}{C_0(X)}$.*

Dowód. Po pierwsze zauważmy, że $\frac{C_h(X)}{C_0(X)}$ jest dobrą definicją $\mathbb{C}^*$-algebry. $C_0(X)$ jest domkniętą podprzestrzenią $C_h(X)$, czyli jest to poprawny iloraz przestrzeni Banacha nad $\mathbb{C}$. Ze względu na przemienność, naturalna definicja iloczynu i sprzężenia na tym ilorazie jest poprawna.

Zauważmy, że $\frac{C_h(X)}{C_0(X)}$ zanurza się w $C(\nu X)$. Istotnie, weźmy $[f] \in \frac{C_h(X)}{C_0(X)}$, przyporządkujmy jej $f|_{\nu X}$. Jest to dobra definicja, bo jeśli $f - g \in C_0(X)$, to $f|_{\nu X} = g|_{\nu X}$. Jest to włożenie algebr: operacje w algebrach są punktowymi operacjami na funkcjach, a włożenie jest obcięciem funkcji do mniejszej dziedziny. Z drugiej strony zauważmy, iż z twierdzenia Tietzego wynika, że skoro νX jest domknięte (bo X jest otwarte w $\bar{X}$), to każda funkcja ciągła na νX w $\mathbb{C}$ rozszerza się do całego $\bar{X}$ (twierdzenie Tietzego formalnie mówi o funkcjach w $\mathbb{R}$; możemy jednak rozszerzyć na każdej współrzędnej niezależnie). Czyli to włożenie jest „na”. □

Mówiliśmy dotychczas, że funkcja f *zbiega do zera w nieskończoności*, jeśli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty K, że $|f(x)| < \epsilon$ dla $x \notin K$. Teraz spróbujmy innej definicji: zamiast zbioru zwartego, dla przestrzeni zgrubnej X, weźmy do definicji zbiór ograniczony: *f zbiega do zera w nieskończoności*, jeśli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje zbiór *ograniczony* K, że $|f(x)| < \epsilon$ dla $x \notin K$. Zauważmy, że definicje te, dla właściwych struktur zgrubnych, się pokrywają: zbiory relatywnie zwarte to dokładnie zbiory ograniczone.

Oznaczmy przez $B_h(X)$ zbiór wszystkich funkcji ograniczonych $X \to \mathbb{C}$ (niekoniecznie ciągłych), spełniających warunek Higsona $df \to 0$, zaś przez $B_0(X)$ ideał w $B_h(X)$ funkcji ograniczonych, które zbiegają do zera w nieskończoności.

Fakt 4.5.2. *Jeśli X jest właściwą przestrzenią zgrubną, to $C_0(X) = C_h(X) \cap B_0(X)$.*

Dowód. Skoro dla właściwych przestrzeni zgrubnych definicje zbiegania do 0 w nieskończoności się pokrywają, to de facto żądana nierówność jest przepisaniem definicji $C_0(X)$: funkcje z $C_0(X)$ są Higsona i zbiegają do 0 w nieskończoności. □

Fakt 4.5.3. *Jeśli X jest właściwą przestrzenią zgrubną, to $B_h(X) = C_h(X) + B_0(X)$.*

Dowód. Suma funkcji ciągłej na uzwarceniu i funkcji ograniczonej jest oczywiście funkcją ograniczoną oraz warunek Higsona zachowuje się przy sumowaniu funkcji. Musimy więc wykazać, że każda funkcja f ograniczona na X spełniająca warunek Higsona rozkłada się na sumę funkcji ciągłej Higsona i funkcji uciekającej do 0 w nieskończoności.

X jest właściwa, więc niech E będzie kontrolowanym otoczeniem diagonali. Wobec tego wokół każdego punktu $z \in X$ istnieje otoczenie U_z, że $U_z \times U_z \subset E$. $\{U_z : z \in X\}$ jest pokryciem otwartym X, możemy więc w nie wpisać lokalnie skończony rozkład jedynki ϕ_z, gdyż X była parazwarta. Zdefiniujmy:

$$g(x) = \sum_{z \in X} \phi_z(x) f(z).$$

Skoro f jest ograniczona, to g jest ograniczona i ciągła, bo ϕ_z są ciągłe. Jeśli wykażemy, że $f - g \in B_0(X)$, to będzie koniec: wówczas g musi spełniać warunek Higsona (bo f i $f - g$ spełniają) i rozłożyliśmy funkcje z $B_h(X)$ na funkcję $g \in C_h(X)$ i $f - g \in B_0(X)$.

Zauważmy, że jako że ϕ_z jest wpisane w U_z, oraz $U_z \times U_z \subset E$, to jeśli $\phi_z(x) \neq 0$ to $(x, z) \in E$. Zauważmy, że

$$(f - g)(x) = \sum_{z \in X} \phi_z(x)(f(x) - f(z)).$$

Weźmy $\epsilon > 0$. Skoro E jest kontrolowany i f spełnia warunek Higsona $df \to 0$, to istnieje ograniczony (czyli relatywnie zwarty) K taki, że na $E \setminus K \times K$ mamy $|df| < \epsilon$. Wobec tego, jeśli $x \notin K$, to

$$|f(x) - g(x)| \leqslant \Big(\sum_{z \in X} \phi_z(x) \Big) \cdot \epsilon = \epsilon.$$

□

Wniosek 4.5.4. Wobec tego, jako że

$$\frac{A + B}{A} = \frac{B}{A \cap B},$$

to

$$C(\nu X) = \frac{C_h(X)}{C_0(X)} = \frac{C_h(X)}{C_h(X) \cap B_0(X)} = \frac{B_0(X) + C_h(X)}{B_0(X)} = \frac{B_h(X)}{B_0(X)}.$$

Czyli zdefiniowaliśmy $C(\nu X)$ za pomocą $B_h(X)$ i $B_0(X)$, które są definiowalne dla dowolnej przestrzeni zgrubnej. Na mocy twierdzenia 2.5.5, algebrze $\frac{B_h(X)}{B_0(X)}$ odpowiada jakaś przestrzeń zwarta i ją będziemy określać jako νX.

Fakt 4.5.5. *Niech X i Y będą właściwymi przestrzeniam zgrubnymi. Wówczas przekształcenie zgrubne $f : X \to Y$ rozrzesza się do przekształcenia ciągłego $\nu f : \nu X \to \nu Y$. Co więcej, jeśli $f : X \to Y$ i $g : X \to Y$ są bliskie, to $\nu f = \nu g$.*

Dowód. Niech $f : X \to Y$ będzie zgrubne. Niech $\phi \in B_h(Y)$. Wówczas $\phi' = \phi \circ f \in B_h(X)$. Oczywiście $\phi' : X \to \mathbb{C}$ i jest funkcją ograniczoną, pozostaje sprawdzić warunek Higsona. Jeśli $\epsilon > 0$, to poza zbiorem K ograniczonym w Y zachodzi $|d\phi(x)| < \epsilon$. Czyli na $f^{-1}(K)$ zachodzi $|d\phi'| < \epsilon$. Ale f jest zgrubna, czyli $f^{-1}(K)$ jest ograniczone w X. Dokładnie identycznie możemy uzasadnić, że jeśli $\phi \in B_0(Y)$ to $\phi \circ f \in B_0(X)$. Wobec tego $f^* : B_h(Y) \to B_h(X)$, że $f^*(\phi) = \phi \circ f$, oraz $f^*(B_0(Y)) \subset B_0(X)$, i oczywiście f^* zachowuje operacje w $\mathbb{C}^*$-algebrach B_0 i B_h.

Wobec tego f^* można zadać też na ilorazie $\frac{B_h(Y)}{B_0(Y)} \to \frac{B_h(X)}{B_0(X)}$, $f^*([\phi]) = [\phi \circ f]$, czyli mamy homomorfizm $C(\nu Y) \to C(\nu X)$. Zgodnie z twierdzeniem 2.5.1, $\nu X \sim \widehat{C(\nu X)}$ i $\nu Y \sim \widehat{C(\nu Y)}$. Homomorfizm $f^* : C(\nu Y) \to C(\nu X)$ definiuje $f^{**} : \widehat{C(\nu X)} \to \widehat{C(\nu Y)}$,

$$f^{**}(\omega_x)(g) = (\omega_x \circ f^*)(g) = \omega_x(g \circ f) = g(f(x)).$$

W spektrach obowiązuje słaba z $*$ topologia, więc f^{**} jest ciągłym przedłużeniem f.

Niech teraz f i g są bliskie. Niech $\phi \in B_h(X)$. Oznaczmy $h = f^*(\phi) - g^*(\phi) = \phi \circ f - \phi \circ g$. Zbiór $E = (f, g)(X)$ jest kontrolowany, bo f i g są bliskie. Weźmy $\epsilon > 0$. Weźmy relatywnie zwarty, czyli ograniczony, K w Y, że $|d\phi| < \epsilon$ na $E \setminus K \times K$. Wówczas $L = f^{-1}(K) \cup g^{-1}(K)$ jest relatywnie zwarty (ograniczony) w X. Jeśli $x \notin L$, to $(f, g)(x) \notin K \times K$, czyli $|h(x)| < \epsilon$. Czyli $h \in B_0(X)$. Czyli $f^* = g^*$ na $\frac{B_h(Y)}{B_0(Y)}$, czyli $\nu f = \nu g$. □

Wniosek 4.5.6. Przestrzenie zgrubnie równoważne mają homeomorficzne korony Higsona.

Dowód. Jak wynika z poprzedniego twierdzenia, mają one identyczne przestrzenie funkcji ciągłych, więc są homeomorficzne, na mocy wniosku 2.5.2. □

Bibliografia

[Roe] John Roe, Lectures on Coarse Geometry, American Mathematical Society 2002

[Arv] William Arveson, An Invitation to C^*-Algebra, Springer-Verlag 1976

[Wiki] Angielska Wikipedia, `en.wikipedia.org`.