

Wybrane zagadnienia teorii grafów — seria 2

skojarzenia, część 1, 15.02.2010–15.03.2010

Zadanie 1. Kwadrat łaciński to taka macierz $n \times n$, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie każda z liczb $\{1, 2, \dots, n\}$ pojawia się dokładnie raz. Jaś narysował pustą macierz $n \times n$, po czym wypełnił pierwsze k wierszy macierzy liczbami od 1 do n tak, by w każdym wierszu każda liczba pojawiała się dokładnie raz, a w każdej kolumnie co najwyżej raz. Pokaż, że Jaś może dopełnić macierz do kompletnego kwadratu łacińskiego.

Zadanie 2. Pokryciem krawędziowym grafu G nazwiemy taki zbiór krawędzi A , że każdy wierzchołek G jest końcem jakiejś krawędzi z A . Niech G będzie grafem bez wierzchołków izolowanych, M — najliczniejszym skojarzeniem w G , zaś A — najmniej licznym pokryciem krawędziowym G . Pokaż, że $|A| + |M| = |V(G)|$.

Zadanie 3. Niech G będzie grafem k -spójnym, zaś M — najliczniejszym skojarzeniem w G . Pokaż, że jeśli $|M| \leq |V(G)|/2 - 1$, to $|M| \geq k$ oraz w G istnieje pokrycie wierzchołkowe rozmiaru $2|M| - k$.