Confluence of an extension of Combinatory Logic by Boolean constants

Łukasz Czajka

DIKU, University of Copenhagen, Denmark

5 September 2017

Combinatory Logic with Boolean constants

The system CL-pc

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{K}xy & \to & x \\
\mathsf{S}xyz & \to & xz(yz) \\
\mathsf{CT}xy & \to & x \\
\mathsf{CF}xy & \to & y \\
\mathsf{C}zxx & \to & x
\end{array}
$$

Combinatory Logic with Boolean constants

The system CL-pc

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{K}xy & \to & x \\ \mathsf{S}xyz & \to & xz(yz) \\ \mathsf{CT}xy & \to & x \\ \mathsf{CF}xy & \to & y \\ \mathsf{C}zxx & \to & x \end{array}$$

Not confluent (Klop, 1980).

Combinatory Logic with Boolean constants

Conditional linearization: the system $\mathrm{CL\text{-}pc}^{\mathrm{L}}$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{K}xy & \to & x \\
\mathsf{S}xyz & \to & xz(yz) \\
\mathsf{CT}xy & \to & x \\
\mathsf{CF}xy & \to & y \\
\mathsf{C}zxy & \to & x \quad \Leftarrow \quad x = y \\
\mathsf{C}zxy & \to & y \quad \Leftarrow \quad x = y
\end{array}
$$

Combinatory Logic with Boolean constants

Conditional linearization: the system $\mathrm{CL\text{-}pc}^{\mathrm{L}}$

$$\begin{array}{rcl@{\quad}c@{\quad}l}
\mathsf{K}xy & \to & x & & \\
\mathsf{S}xyz & \to & xz(yz) & & \\
\mathsf{CT}xy & \to & x & & \\
\mathsf{CF}xy & \to & y & & \\
\mathsf{C}zxy & \to & x & \Leftarrow & x = y \\
\mathsf{C}zxy & \to & y & \Leftarrow & x = y
\end{array}$$

Confluent (de Vrijer, 1990).

Combinatory Logic with Boolean constants

Conditional linearization: the system $\mathrm{CL\text{-}pc}^{\mathrm{L}}$

$$
\begin{array}{rcllc}
\mathsf{K}xy & \to & x & & \\
\mathsf{S}xyz & \to & xz(yz) & & \\
\mathsf{CT}xy & \to & x & & \\
\mathsf{CF}xy & \to & y & & \\
\mathsf{C}zxy & \to & x & \Leftarrow & x = y \\
\mathsf{C}zxy & \to & y & \Leftarrow & x = y
\end{array}
$$

Confluent (de Vrijer, 1990).

The confluence proof of de Vrijer is essentially based on a "semantic" argument.

Combinatory Logic with Boolean constants

Conditional linearization: the system CL-pc[1]

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{K}xy & \rightarrow & x \\
\mathsf{S}xyz & \rightarrow & xz(yz) \\
\mathsf{CT}xy & \rightarrow & x \\
\mathsf{CF}xy & \rightarrow & y \\
\mathsf{C}zxy & \rightarrow & x \quad \Leftarrow \quad x = y
\end{array}
$$

Combinatory Logic with Boolean constants

Conditional linearization: the system $\mathrm{CL\text{-}pc}^1$

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{K}xy & \to & x \\ \mathsf{S}xyz & \to & xz(yz) \\ \mathsf{CT}xy & \to & x \\ \mathsf{CF}xy & \to & y \\ \mathsf{C}zxy & \to & x \quad \Leftarrow \quad x = y \end{array}$$

Confluence of $\mathrm{CL\text{-}pc}^1$ appears as problem 15 on the RTA list of open problems.

Combinatory Logic with Boolean constants

Conditional linearization: the system $\mathrm{CL\text{-}pc}^1$

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{K}xy & \to & x \\ \mathsf{S}xyz & \to & xz(yz) \\ \mathsf{CT}xy & \to & x \\ \mathsf{CF}xy & \to & y \\ \mathsf{C}zxy & \to & x \quad \Leftarrow \quad x = y \end{array}$$

Confluence of $\mathrm{CL\text{-}pc}^1$ appears as problem 15 on the RTA list of open problems.

We give a "syntactic" proof of confluence of $\mathrm{CL\text{-}pc}^1$. This proof also works for $\mathrm{CL\text{-}pc}^{\mathrm{L}}$.

Lemma

The following are equivalent.

- $t_1 =_{\mathrm{CL\text{-}pc}} t_2$,
- $t_1 =_{\mathrm{CL\text{-}pc^L}} t_2$,
- $t_1 =_{\mathrm{CL\text{-}pc^1}} t_2$.

Combinatory Logic with Boolean constants

Confluence

De Vrijer shows $T \neq_{\mathrm{CL\text{-}pc^L}} F$ by a model construction within the Graph Model $P\omega$. Then confluence of $\mathrm{CL\text{-}pc^L}$ is proven using a simple technical argument with an auxiliary term rewriting system.

Combinatory Logic with Boolean constants

Confluence

De Vrijer shows $T \neq_{\mathrm{CL\text{-}pc}^{\mathrm{L}}} F$ by a model construction within the Graph Model $P\omega$. Then confluence of $\mathrm{CL\text{-}pc}^{\mathrm{L}}$ is proven using a simple technical argument with an auxiliary term rewriting system.

We show: if $t =_{\mathrm{CL\text{-}pc}^{1}} F$ then $t \rightarrow^{*}_{\mathrm{CL\text{-}pc}^{1}} F$.

Combinatory Logic with Boolean constants

Confluence

De Vrijer shows $T \neq_{\mathrm{CL\text{-}pc^L}} F$ by a model construction within the Graph Model $P\omega$. Then confluence of $\mathrm{CL\text{-}pc^L}$ is proven using a simple technical argument with an auxiliary term rewriting system.

We show: if $t =_{\mathrm{CL\text{-}pc^1}} F$ then $t \to^*_{\mathrm{CL\text{-}pc^1}} F$.

Then confluence of $\mathrm{CL\text{-}pc^1}$ is proven using an argument with an auxiliary system similar to that of de Vrijer.

Confluence of $\mathrm{CL\text{-}pc}^1$

Difficulty

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{K}xy & \to & x \\
\mathsf{S}xyz & \to & xz(yz) \\
\mathsf{CT}xy & \to & x \\
\mathsf{CF}xy & \to & y \\
\mathsf{C}zxy & \to & x \quad \Leftarrow \quad x = y
\end{array}
$$

If $t_1 =_{\mathrm{CL\text{-}pc}^1} t_2$ then $\mathsf{CF}t_1t_2 \to_{\mathrm{CL\text{-}pc}^1} t_1$ and $\mathsf{CF}t_1t_2 \to_{\mathrm{CL\text{-}pc}^1} t_2$.

Confluence of $\mathrm{CL\text{-}pc}^1$

If $q =_{\mathrm{CL\text{-}pc}^1} F$ then $q \to^*_{\mathrm{CL\text{-}pc}^1} F$.

Confluence of $\mathrm{CL\text{-}pc}^1$

If $q =_{\mathrm{CL\text{-}pc}} F$ then $q \to^*_{\mathrm{CL\text{-}pc}^1} F$.

Confluence of $\mathrm{CL\text{-}pc}^1$

If $q =_{\mathrm{CL\text{-}pc}} F$ then $q \to^*_{\mathrm{CL\text{-}pc}^1} F$.

Given a conversion $q =_{\mathrm{CL\text{-}pc}} F$ we consider a certain set $\mathcal{S}(q =_{\mathrm{CL\text{-}pc}} \mathsf{F})$ of reductions in $\mathrm{CL\text{-}pc}^{\mathrm{L}}$ from q to F such that it contains at least one reduction in $\mathrm{CL\text{-}pc}^1$.

Confluence of $\mathrm{CL\text{-}pc}^1$

If $q =_{\mathrm{CL\text{-}pc}} F$ then $q \to^*_{\mathrm{CL\text{-}pc}^1} F$.

Given a conversion $q =_{\mathrm{CL\text{-}pc}} F$ we consider a certain set $\mathcal{S}(q =_{\mathrm{CL\text{-}pc}} \mathsf{F})$ of reductions in $\mathrm{CL\text{-}pc}^{\mathrm{L}}$ from q to F such that it contains at least one reduction in $\mathrm{CL\text{-}pc}^1$.

1. if $\mathcal{S}(q =_{\mathrm{CL\text{-}pc}} \mathsf{F})$ is defined and $q \to_{\mathrm{CL\text{-}pc}} q'$, then we need to define $\mathcal{S}(q' \;{}_{\mathrm{CL\text{-}pc}}\!\!\leftarrow q =_{\mathrm{CL\text{-}pc}} \mathsf{F})$,
2. if $\mathcal{S}(q =_{\mathrm{CL\text{-}pc}} \mathsf{F})$ is defined and $q \;{}_{\mathrm{CL\text{-}pc}}\!\!\leftarrow q'$, then we need to define $\mathcal{S}(q' \to_{\mathrm{CL\text{-}pc}} q =_{\mathrm{CL\text{-}pc}} \mathsf{F})$.

The system $\mathrm{CL\text{-}pc}^s$

The set $\mathcal{S}(q =_{\mathrm{CL\text{-}pc}} \mathsf{F})$ is defined by labelling certain constants in q and defining permissible reductions on a labelled variant of q by a system $\mathrm{CL\text{-}pc}^s$.

The system $\mathrm{CL\text{-}pc}^s$

The set $\mathcal{S}(q =_{\mathrm{CL\text{-}pc}} \mathsf{F})$ is defined by labelling certain constants in q and defining permissible reductions on a labelled variant of q by a system $\mathrm{CL\text{-}pc}^s$.

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{C}_1\mathsf{T}_1xy & \to & x \\
\mathsf{C}_1\mathsf{F}_1xy & \to & y \\
\mathsf{K}_1xy & \to & x
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccl}
\mathsf{C}_2zxy & \to & x & \Leftarrow & |x| =_{\mathrm{CL\text{-}pc}^1} |y| \\
\mathsf{C}_2zxy & \to & y & \Leftarrow & |x| =_{\mathrm{CL\text{-}pc}^1} |y|
\end{array}
$$

and e.g.

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{S}^{1,1}xy_1\langle z_{0,1}, z_{1,1}\rangle & \to & xz_{0,1}(y_1z_{1,1}) \\
\mathsf{S}^{1,2,1}x\langle y_1, y_2\rangle\langle z_{0,1}, z_{1,1}, z_{1,2}, z_{2,1}\rangle & \to & xz_{0,1}\langle y_1\langle z_{1,1}, z_{1,2}\rangle, y_2z_{1,2}\rangle \\
\mathsf{S}^{2,2}xy_1\langle z_{0,1}, z_{0,2}, z_{1,1}, z_{1,2}\rangle & \to & x\langle z_{0,1}, z_{0,2}\rangle(y_1\langle z_{1,1}, z_{1,2}\rangle)
\end{array}
$$

where $|z_{i,j}| =_{\mathrm{CL\text{-}pc}^1} |z_{i',j'}|$ and $|y_i| =_{\mathrm{CL\text{-}pc}^1} |y_j|$.

Significant and insignificant subterms

- Significant (sub)terms (s-terms): "labelled" subterms, e.g., $\mathsf{C}_1 t_1 t_2 t_3$, $\mathsf{C}_1 t$, $\mathsf{K}_1 t$, etc., $\mathrm{CL\text{-}pc}$-reductions/expansions on their erasures are translated to s-reductions/expansions (i.e. reductions/expansions in $\mathrm{CL\text{-}pc}^s$).

Significant and insignificant subterms

- Significant (sub)terms (*s*-terms): "labelled" subterms, e.g., $C_1 t_1 t_2 t_3$, $C_1 t$, $K_1 t$, etc., $\mathrm{CL\text{-}pc}$-reductions/expansions on their erasures are translated to *s*-reductions/expansions (i.e. reductions/expansions in $\mathrm{CL\text{-}pc}^s$).
- Insignificant (sub)terms (*i*-terms): "unlabelled" subterms, $\mathrm{CL\text{-}pc}$-reductions/expansions inside them don't matter – they are translated to *i*-reductions/expansions (i.e. reductions/expansions in $\mathrm{CL\text{-}pc}^1$).

Translating the CL-pc-conversion

- CL-pc-reductions/expansions of i-terms are translated to i-reductions/expansions.

Translating the CL-pc-conversion

- CL-pc-reductions/expansions of *i*-terms are translated to *i*-reductions/expansions.
- CL-pc-reductions of (erasures of) *s*-terms are translated to *s*-reductions.

Translating the CL-pc-conversion

- CL-pc-reductions/expansions of *i*-terms are translated to *i*-reductions/expansions.
- CL-pc-reductions of (erasures of) *s*-terms are translated to *s*-reductions.
- CL-pc-expansions of (erasures of) *s*-terms are translated to *a*-expansions.

Translating the CL-pc-conversion

- CL-pc-reductions/expansions of *i*-terms are translated to *i*-reductions/expansions.
- CL-pc-reductions of (erasures of) *s*-terms are translated to *s*-reductions.
- CL-pc-expansions of (erasures of) *s*-terms are translated to *a*-expansions.

a-expansion is like *s*-expansion but it also specifies the labelling of the expansion (and some other technicalities).

Example

$$\mathsf{F} \leftarrow \mathsf{C(KF\Omega)FF} \leftarrow \mathsf{C(KF\Omega)F(CTF(KF\Omega))} \rightarrow \mathsf{CFF(CTF(KF\Omega))} \leftarrow \mathsf{CFF(C(KTF)F(KF\Omega))} \rightarrow \mathsf{C(KTF)F(KF\Omega)} \rightarrow \mathsf{C(KTF)FF} \rightarrow \mathsf{F} \leftarrow \mathsf{KF(CF)} \leftarrow \mathsf{SKCF} \leftarrow \mathsf{SKC(KF\Omega)} \rightarrow \mathsf{SKCF}$$

Example

$$\mathsf{F} \leftarrow \mathsf{C(KF\Omega)FF} \leftarrow \mathsf{C(KF\Omega)F(CTF(KF\Omega))} \rightarrow \mathsf{CFF(CTF(KF\Omega))} \leftarrow \mathsf{CFF(C(KTF)F(KF\Omega))} \rightarrow \mathsf{C(KTF)F(KF\Omega)} \rightarrow \mathsf{C(KTF)FF} \rightarrow \mathsf{F} \leftarrow \mathsf{KF(CF)} \leftarrow \mathsf{SKCF} \leftarrow \mathsf{SKC(KF\Omega)} \rightarrow \mathsf{SKCF}$$

Example

$$F_1 \ {}_a\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1F_1$$
$$\succ C(KF\Omega)FF \leftarrow C(KF\Omega)F(CTF(KF\Omega)) \rightarrow CFF(CTF(KF\Omega)) \leftarrow CFF(C(KTF)F(KF\Omega)) \rightarrow C(KTF)F(KF\Omega) \rightarrow C(KTF)FF \rightarrow F \leftarrow KF(CF) \leftarrow SKCF \leftarrow SKC(KF\Omega) \rightarrow SKCF$$

Example

$\mathsf{F}_1 \;{}_a\!\!\leftarrow \mathsf{C}_2(\mathsf{KF}\Omega)\mathsf{F}_1\mathsf{F}_1$
$\succ \mathsf{C}(\mathsf{KF}\Omega)\mathsf{FF} \leftarrow \mathsf{C}(\mathsf{KF}\Omega)\mathsf{F}(\mathsf{CTF}(\mathsf{KF}\Omega)) \rightarrow \mathsf{CFF}(\mathsf{CTF}(\mathsf{KF}\Omega)) \leftarrow \mathsf{CFF}(\mathsf{C}(\mathsf{KTF})\mathsf{F}(\mathsf{KF}\Omega)) \rightarrow \mathsf{C}(\mathsf{KTF})\mathsf{F}(\mathsf{KF}\Omega) \rightarrow \mathsf{C}(\mathsf{KTF})\mathsf{FF} \rightarrow \mathsf{F} \leftarrow \mathsf{KF}(\mathsf{CF}) \leftarrow \mathsf{SKCF} \leftarrow \mathsf{SKC}(\mathsf{KF}\Omega) \rightarrow \mathsf{SKCF}$

Example

$$F_1 \;{}_a\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1F_1 \;{}_a\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1(C_1T_1F_1(KF\Omega))$$
$$\succ C(KF\Omega)F(CTF(KF\Omega)) \to CFF(CTF(KF\Omega)) \leftarrow$$
$$CFF(C(KTF)F(KF\Omega)) \to C(KTF)F(KF\Omega) \to C(KTF)FF \to F \leftarrow$$
$$KF(CF) \leftarrow SKCF \leftarrow SKC(KF\Omega) \to SKCF$$

Example

$$\mathsf{F}_1 \;{}_{a}\!\leftarrow \mathsf{C}_2(\mathsf{KF}\Omega)\mathsf{F}_1\mathsf{F}_1 \;{}_{a}\!\leftarrow \mathsf{C}_2(\mathsf{KF}\Omega)\mathsf{F}_1(\mathsf{C}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega))$$
$$\succ \mathsf{C}(\mathsf{KF}\Omega)\mathsf{F}(\mathsf{CTF}(\mathsf{KF}\Omega)) \to \mathsf{CFF}(\mathsf{CTF}(\mathsf{KF}\Omega)) \leftarrow$$
$$\mathsf{CFF}(\mathsf{C}(\mathsf{KTF})\mathsf{F}(\mathsf{KF}\Omega)) \to \mathsf{C}(\mathsf{KTF})\mathsf{F}(\mathsf{KF}\Omega) \to \mathsf{C}(\mathsf{KTF})\mathsf{FF} \to \mathsf{F} \leftarrow$$
$$\mathsf{KF}(\mathsf{CF}) \leftarrow \mathsf{SKCF} \leftarrow \mathsf{SKC}(\mathsf{KF}\Omega) \to \mathsf{SKCF}$$

Example

$$F_1 \;{}_a\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1F_1 \;{}_a\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \to_i$$
$$C_2FF_1(C_1T_1F_1(KF\Omega))$$
$$\succ CFF(CTF(KF\Omega)) \leftarrow CFF(C(KTF)F(KF\Omega)) \to$$
$$C(KTF)F(KF\Omega) \to C(KTF)FF \to F \leftarrow$$
$$KF(CF) \leftarrow SKCF \leftarrow SKC(KF\Omega) \to SKCF$$

Example

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{F}_1 \;{}_a\!\!\leftarrow \mathsf{C}_2(\mathsf{KF}\Omega)\mathsf{F}_1\mathsf{F}_1 \;{}_a\!\!\leftarrow \mathsf{C}_2(\mathsf{KF}\Omega)\mathsf{F}_1(\mathsf{C}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega)) \to_i \\
&\quad \mathsf{C}_2\mathsf{FF}_1(\mathsf{C}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega)) \\
&\quad \succ \mathsf{CFF}(\mathsf{CTF}(\mathsf{KF}\Omega)) \leftarrow \mathsf{CFF}(\mathsf{C}(\mathsf{KTF})\mathsf{F}(\mathsf{KF}\Omega)) \to \\
&\quad \mathsf{C}(\mathsf{KTF})\mathsf{F}(\mathsf{KF}\Omega) \to \mathsf{C}(\mathsf{KTF})\mathsf{FF} \to \mathsf{F} \leftarrow \\
&\quad \mathsf{KF}(\mathsf{CF}) \leftarrow \mathsf{SKCF} \leftarrow \mathsf{SKC}(\mathsf{KF}\Omega) \to \mathsf{SKCF}
\end{aligned}
$$

Example

$$F_1 \;{}_a\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1F_1 \;{}_a\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \to_i C_2FF_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \;{}_a\!\leftarrow C_2FF_1(C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega)) \succ CFF(C(KTF)F(KF\Omega)) \to C(KTF)F(KF\Omega) \to C(KTF)FF \to F \leftarrow KF(CF) \leftarrow SKCF \leftarrow SKC(KF\Omega) \to SKCF$$

Example

$$
\mathsf{F}_1 \; {}_a{\leftarrow} \; \mathsf{C}_2(\mathsf{KF}\Omega)\mathsf{F}_1\mathsf{F}_1 \; {}_a{\leftarrow} \; \mathsf{C}_2(\mathsf{KF}\Omega)\mathsf{F}_1(\mathsf{C}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega)) \to_i
\mathsf{C}_2\mathsf{FF}_1(\mathsf{C}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega)) \; {}_a{\leftarrow} \; \mathsf{C}_2\mathsf{FF}_1(\mathsf{C}_1(\mathsf{K}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F})\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega))
\succ \mathsf{CFF}(\mathsf{C}(\mathsf{KTF})\mathsf{F}(\mathsf{KF}\Omega)) \to \mathsf{C}(\mathsf{KTF})\mathsf{F}(\mathsf{KF}\Omega) \to \mathsf{C}(\mathsf{KTF})\mathsf{FF} \to \mathsf{F} \leftarrow
\mathsf{KF}(\mathsf{CF}) \leftarrow \mathsf{SKCF} \leftarrow \mathsf{SKC}(\mathsf{KF}\Omega) \to \mathsf{SKCF}
$$

Example

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{F}_1 \ {}_a\!\leftarrow \mathsf{C}_2(\mathsf{KF}\Omega)\mathsf{F}_1\mathsf{F}_1 \ {}_a\!\leftarrow \mathsf{C}_2(\mathsf{KF}\Omega)\mathsf{F}_1(\mathsf{C}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega)) \to_i \\
&\quad \mathsf{C}_2\mathsf{FF}_1(\mathsf{C}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega)) \ {}_a\!\leftarrow \mathsf{C}_2\mathsf{FF}_1(\mathsf{C}_1(\mathsf{K}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F})\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega)) \to_s \\
&\quad \mathsf{C}_1(\mathsf{K}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F})\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega) \\
&\quad \succ \mathsf{C}(\mathsf{KTF})\mathsf{F}(\mathsf{KF}\Omega) \to \mathsf{C}(\mathsf{KTF})\mathsf{FF} \to \mathsf{F} \leftarrow \\
&\quad \mathsf{KF}(\mathsf{CF}) \leftarrow \mathsf{SKCF} \leftarrow \mathsf{SKC}(\mathsf{KF}\Omega) \to \mathsf{SKCF}
\end{aligned}
$$

Example

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{F}_1\ {}_a\!\leftarrow \mathsf{C}_2(\mathsf{KF}\Omega)\mathsf{F}_1\mathsf{F}_1\ {}_a\!\leftarrow \mathsf{C}_2(\mathsf{KF}\Omega)\mathsf{F}_1(\mathsf{C}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega)) \rightarrow_i \\
&\quad \mathsf{C}_2\mathsf{FF}_1(\mathsf{C}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega))\ {}_a\!\leftarrow \mathsf{C}_2\mathsf{FF}_1(\mathsf{C}_1(\mathsf{K}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F})\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega)) \rightarrow_s \\
&\quad \mathsf{C}_1(\mathsf{K}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F})\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega) \\
&\quad \succ \mathsf{C}(\mathsf{KTF})\mathsf{F}(\mathsf{KF}\Omega) \rightarrow \mathsf{C}(\mathsf{KTF})\mathsf{FF} \rightarrow \mathsf{F} \leftarrow \\
&\quad \mathsf{KF}(\mathsf{CF}) \leftarrow \mathsf{SKCF} \leftarrow \mathsf{SKC}(\mathsf{KF}\Omega) \rightarrow \mathsf{SKCF}
\end{aligned}
$$

Example

$$F_1 \;{}_a\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1F_1 \;{}_a\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \to_i$$
$$C_2FF_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \;{}_a\!\leftarrow C_2FF_1(C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega)) \to_s$$
$$C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega) \to_i C_1(K_1T_1F)F_1F$$
$$\succ C(KTF)FF \to F \leftarrow$$
$$KF(CF) \leftarrow SKCF \leftarrow SKC(KF\Omega) \to SKCF$$

Example

$$
\begin{aligned}
&F_1 \;{}_a\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1F_1 \;{}_a\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \to_i \\
&\quad C_2FF_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \;{}_a\!\leftarrow C_2FF_1(C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega)) \to_s \\
&\quad C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega) \to_i C_1(K_1T_1F)F_1F \\
&\quad \succ C(KTF)FF \to F \leftarrow \\
&\quad KF(CF) \leftarrow SKCF \leftarrow SKC(KF\Omega) \to SKCF
\end{aligned}
$$

Example

$$F_1 \;{}_a\!\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1F_1 \;{}_a\!\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \rightarrow_i$$
$$C_2FF_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \;{}_a\!\!\leftarrow C_2FF_1(C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega)) \rightarrow_s$$
$$C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega) \rightarrow_i C_1(K_1T_1F)F_1F \rightarrow_s^* F_1$$
$$\succ F \leftarrow KF(CF) \leftarrow SKCF \leftarrow SKC(KF\Omega) \rightarrow SKCF$$

Example

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{F}_1 \;{}_a\!\leftarrow \mathsf{C}_2(\mathsf{KF}\Omega)\mathsf{F}_1\mathsf{F}_1 \;{}_a\!\leftarrow \mathsf{C}_2(\mathsf{KF}\Omega)\mathsf{F}_1(\mathsf{C}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega)) \rightarrow_i \\
&\quad \mathsf{C}_2\mathsf{FF}_1(\mathsf{C}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega)) \;{}_a\!\leftarrow \mathsf{C}_2\mathsf{FF}_1(\mathsf{C}_1(\mathsf{K}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F})\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega)) \rightarrow_s \\
&\quad \mathsf{C}_1(\mathsf{K}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F})\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega) \rightarrow_i \mathsf{C}_1(\mathsf{K}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F})\mathsf{F}_1\mathsf{F} \rightarrow_s^* \mathsf{F}_1 \\
&\quad \succ \mathsf{F} \leftarrow \mathsf{KF}(\mathsf{CF}) \leftarrow \mathsf{SKCF} \leftarrow \mathsf{SKC}(\mathsf{KF}\Omega) \rightarrow \mathsf{SKCF}
\end{aligned}
$$

Example

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{F_1} \;{}_a\!\leftarrow \mathsf{C_2(KF\Omega)F_1F_1} \;{}_a\!\leftarrow \mathsf{C_2(KF\Omega)F_1(C_1T_1F_1(KF\Omega))} \rightarrow_i \\
&\quad \mathsf{C_2FF_1(C_1T_1F_1(KF\Omega))} \;{}_a\!\leftarrow \mathsf{C_2FF_1(C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega))} \rightarrow_s \\
&\quad \mathsf{C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega)} \rightarrow_i \mathsf{C_1(K_1T_1F)F_1F} \rightarrow_s^* \mathsf{F_1} \;{}_a\!\leftarrow \\
&\quad \mathsf{K_1F_1(CF)} \\
&\quad \succ \mathsf{KF(CF)} \leftarrow \mathsf{SKCF} \leftarrow \mathsf{SKC(KF\Omega)} \rightarrow \mathsf{SKCF}
\end{aligned}
$$

Example

$$
\begin{aligned}
&F_1 \ {}_a\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1F_1 \ {}_a\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \rightarrow_i \\
&\quad C_2FF_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \ {}_a\!\leftarrow C_2FF_1(C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega)) \rightarrow_s \\
&\quad C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega) \rightarrow_i C_1(K_1T_1F)F_1F \rightarrow_s^* F_1 \ {}_a\!\leftarrow \\
&\quad K_1F_1(CF) \\
&\quad \succ KF(CF) \leftarrow SKCF \leftarrow SKC(KF\Omega) \rightarrow SKCF
\end{aligned}
$$

Example

$$
\begin{aligned}
&F_1 \;{}_a\!\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1F_1 \;{}_a\!\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \rightarrow_i \\
&\quad C_2FF_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \;{}_a\!\!\leftarrow C_2FF_1(C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega)) \rightarrow_s \\
&\quad C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega) \rightarrow_i C_1(K_1T_1F)F_1F \rightarrow_s^* F_1 \;{}_a\!\!\leftarrow \\
&\quad K_1F_1(CF) \;{}_a\!\!\leftarrow S^{1,1}K_1C\langle F_1, F\rangle \\
&\quad \succ SKCF \leftarrow SKC(KF\Omega) \rightarrow SKCF
\end{aligned}
$$

Example

$$
\begin{aligned}
&F_1 \ {}_a\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1F_1 \ {}_a\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \to_i \\
&\quad C_2FF_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \ {}_a\!\leftarrow C_2FF_1(C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega)) \to_s \\
&\quad C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega) \to_i C_1(K_1T_1F)F_1F \to_s^* F_1 \ {}_a\!\leftarrow \\
&\quad K_1F_1(CF) \ {}_a\!\leftarrow S^{1,1}K_1C\langle F_1, F\rangle \\
&\quad \succ SKCF \leftarrow SKC(KF\Omega) \to SKCF
\end{aligned}
$$

Example

$$
\begin{aligned}
&F_1 \ {}_a\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1F_1 \ {}_a\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \rightarrow_i \\
&\quad C_2FF_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \ {}_a\!\leftarrow C_2FF_1(C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega)) \rightarrow_s \\
&\quad C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega) \rightarrow_i C_1(K_1T_1F)F_1F \rightarrow_s^* F_1 \ {}_a\!\leftarrow \\
&\quad K_1F_1(CF) \ {}_a\!\leftarrow S^{1,1}K_1C\langle F_1, F\rangle \ {}_{a,i}^{\ *}\!\leftarrow \\
&\quad S^{1,1}K_1C\langle K_1F_1\Omega, KF\Omega\rangle \\
&\quad \succ SKC(KF\Omega) \rightarrow SKCF
\end{aligned}
$$

Example

$$
\begin{aligned}
&F_1 \;{}_a\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1F_1 \;{}_a\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \rightarrow_i \\
&\quad C_2FF_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \;{}_a\!\leftarrow C_2FF_1(C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega)) \rightarrow_s \\
&\quad C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega) \rightarrow_i C_1(K_1T_1F)F_1F \rightarrow_s^* F_1 \;{}_a\!\leftarrow \\
&\quad K_1F_1(CF) \;{}_a\!\leftarrow S^{1,1}K_1C\langle F_1, F\rangle \;{}_{a,i}^{\;*}\!\leftarrow \\
&\quad S^{1,1}K_1C\langle K_1F_1\Omega, KF\Omega\rangle \\
&\quad \succ SKC(KF\Omega) \rightarrow SKCF
\end{aligned}
$$

Example

$$
\begin{aligned}
&F_1 \ {}_a{\leftarrow}\ C_2(KF\Omega)F_1F_1 \ {}_a{\leftarrow}\ C_2(KF\Omega)F_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \rightarrow_i \\
&\quad C_2FF_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \ {}_a{\leftarrow}\ C_2FF_1(C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega)) \rightarrow_s \\
&\quad C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega) \rightarrow_i C_1(K_1T_1F)F_1F \rightarrow_s^* F_1 \ {}_a{\leftarrow} \\
&\quad K_1F_1(CF) \ {}_a{\leftarrow}\ S^{1,1}K_1C\langle F_1, F\rangle \ {}^{\ *}_{a,i}{\leftarrow} \\
&\quad S^{1,1}K_1C\langle K_1F_1\Omega, KF\Omega\rangle \rightarrow_{s,i}^* S^{1,1}K_1C\langle F_1, F\rangle \\
&\quad \succ SKCF
\end{aligned}
$$

Example

$$\mathsf{F}_1 \;{}_a\!\leftarrow \mathsf{C}_2(\mathsf{KF}\Omega)\mathsf{F}_1\mathsf{F}_1 \;{}_a\!\leftarrow \mathsf{C}_2(\mathsf{KF}\Omega)\mathsf{F}_1(\mathsf{C}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega)) \to_i$$
$$\mathsf{C}_2\mathsf{FF}_1(\mathsf{C}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega)) \;{}_a\!\leftarrow \mathsf{C}_2\mathsf{FF}_1(\mathsf{C}_1(\mathsf{K}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F})\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega)) \to_s$$
$$\mathsf{C}_1(\mathsf{K}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F})\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega) \to_i \mathsf{C}_1(\mathsf{K}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F})\mathsf{F}_1\mathsf{F} \to_s^* \mathsf{F}_1 \;{}_a\!\leftarrow$$
$$\mathsf{K}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{CF}) \;{}_a\!\leftarrow \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}\rangle \;{}^{\,*}_{a,i}\!\leftarrow$$
$$\mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{K}_1\mathsf{F}_1\Omega, \mathsf{KF}\Omega\rangle \to_{s,i}^* \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}\rangle$$

Confluence of $\mathrm{CL\text{-}pc}^1$

We show: for t "standard" (obtained by the process just indicated): if $t \to_s^! t'$ then $t' \equiv \mathsf{F}_1$.

Confluence of $\mathrm{CL\text{-}pc}^1$

We show: for t "standard" (obtained by the process just indicated): if $t \to_s^! t'$ then $t' \equiv \mathsf{F}_1$.

From this it follows that there is an s-reduction which may be "erased" to a $\mathrm{CL\text{-}pc}^1$-reduction from t to F.

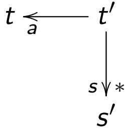
Example

$$\begin{aligned}
&\mathsf{F}_1 \;{}_a\!\leftarrow \mathsf{C}_2(\mathsf{KF}\Omega)\mathsf{F}_1\mathsf{F}_1 \;{}_a\!\leftarrow \mathsf{C}_2(\mathsf{KF}\Omega)\mathsf{F}_1(\mathsf{C}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega)) \rightarrow_i \\
&\quad \mathsf{C}_2\mathsf{FF}_1(\mathsf{C}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega)) \;{}_a\!\leftarrow \mathsf{C}_2\mathsf{FF}_1(\mathsf{C}_1(\mathsf{K}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F})\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega)) \rightarrow_s \\
&\quad \mathsf{C}_1(\mathsf{K}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F})\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega) \rightarrow_i \mathsf{C}_1(\mathsf{K}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F})\mathsf{F}_1\mathsf{F} \rightarrow_s^* \mathsf{F}_1 \;{}_a\!\leftarrow \\
&\quad \mathsf{K}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{CF}) \;{}_a\!\leftarrow \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}\rangle \;{}_{a,i}^{\;*}\!\leftarrow \\
&\quad \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{K}_1\mathsf{F}_1\Omega, \mathsf{KF}\Omega\rangle \rightarrow_{s,i}^* \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}\rangle
\end{aligned}$$

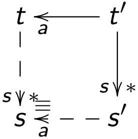
Example

$$\mathsf{F_1 \;{}_s\!\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1F_1 \;{}_a\!\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \rightarrow_i}$$
$$\mathsf{C_2FF_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \;{}_a\!\!\leftarrow C_2FF_1(C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega)) \rightarrow_s}$$
$$\mathsf{C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega) \rightarrow_i C_1(K_1T_1F)F_1F \rightarrow_s^* F_1 \;{}_a\!\!\leftarrow}$$
$$\mathsf{K_1F_1(CF) \;{}_a\!\!\leftarrow S^{1,1}K_1C\langle F_1, F\rangle \;{}_{a,i}^{\;*}\!\!\leftarrow}$$
$$\mathsf{S^{1,1}K_1C\langle K_1F_1\Omega, KF\Omega\rangle \rightarrow_{s,i}^* S^{1,1}K_1C\langle F_1, F\rangle}$$

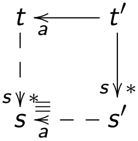
Commutation of *a*-reduction and *s*-reduction



Commutation of a-reduction and s-reduction



Commutation of a-reduction and s-reduction



Hence if $t \to_s^* s'$ with s' in s-normal form then $s' = \mathsf{F}_1$.

Example

$$
\begin{aligned}
&F_1 \;{}_s\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1F_1 \;{}_a\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \rightarrow_i \\
&\quad C_2FF_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \;{}_a\!\leftarrow C_2FF_1(C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega)) \rightarrow_s \\
&\quad C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega) \rightarrow_i C_1(K_1T_1F)F_1F \rightarrow_s^* F_1 \;{}_a\!\leftarrow \\
&\quad K_1F_1(CF) \;{}_a\!\leftarrow S^{1,1}K_1C\langle F_1, F\rangle \;{}_{a,i}^{\;*}\!\leftarrow \\
&\quad S^{1,1}K_1C\langle K_1F_1\Omega, KF\Omega\rangle \rightarrow_{s,i}^* S^{1,1}K_1C\langle F_1, F\rangle
\end{aligned}
$$

Example

$$\mathsf{F}_1 \ {}_s\!\leftarrow \mathsf{C}_2(\mathsf{KF}\Omega)\mathsf{F}_1\mathsf{F}_1 \ {}_s\!\leftarrow \mathsf{C}_2(\mathsf{KF}\Omega)\mathsf{F}_1(\mathsf{C}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega)) \rightarrow_i$$
$$\mathsf{C}_2\mathsf{FF}_1(\mathsf{C}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega)) \ {}_a\!\leftarrow \mathsf{C}_2\mathsf{FF}_1(\mathsf{C}_1(\mathsf{K}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F})\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega)) \rightarrow_s$$
$$\mathsf{C}_1(\mathsf{K}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F})\mathsf{F}_1(\mathsf{KF}\Omega) \rightarrow_i \mathsf{C}_1(\mathsf{K}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F})\mathsf{F}_1\mathsf{F} \rightarrow_s^* \mathsf{F}_1 \ {}_a\!\leftarrow$$
$$\mathsf{K}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{CF}) \ {}_a\!\leftarrow \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}\rangle \ {}_{a,i}^{\ *}\!\leftarrow$$
$$\mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{K}_1\mathsf{F}_1\Omega, \mathsf{KF}\Omega\rangle \rightarrow_{s,i}^* \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}\rangle$$

Example

$$
\begin{aligned}
&F_1 \;{}_s\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1F_1 \;{}_s\!\leftarrow C_2(KF\Omega)F_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \to_i \\
&\quad C_2FF_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \;{}_a\!\leftarrow C_2FF_1(C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega)) \to_s \\
&\quad C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega) \to_i C_1(K_1T_1F)F_1F \to_s^* F_1 \;{}_a\!\leftarrow \\
&\quad K_1F_1(CF) \;{}_a\!\leftarrow S^{1,1}K_1C\langle F_1, F\rangle \;{}^{\;*}_{a,i}\!\leftarrow \\
&\quad S^{1,1}K_1C\langle K_1F_1\Omega, KF\Omega\rangle \to_{s,i}^* S^{1,1}K_1C\langle F_1, F\rangle
\end{aligned}
$$

Example

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{F}_1 \;{}_s\!\leftarrow \mathsf{C}_2\mathsf{F}\mathsf{F}_1\mathsf{F}_1 \;{}_s\!\leftarrow \mathsf{C}_2\mathsf{F}\mathsf{F}_1(\mathsf{C}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{K}\mathsf{F}\Omega))\\
&\quad {}_a\!\leftarrow \mathsf{C}_2\mathsf{F}\mathsf{F}_1(\mathsf{C}_1(\mathsf{K}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F})\mathsf{F}_1(\mathsf{K}\mathsf{F}\Omega)) \rightarrow_s\\
&\quad \mathsf{C}_1(\mathsf{K}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F})\mathsf{F}_1(\mathsf{K}\mathsf{F}\Omega) \rightarrow_i \mathsf{C}_1(\mathsf{K}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F})\mathsf{F}_1\mathsf{F} \rightarrow_s^* \mathsf{F}_1 \;{}_a\!\leftarrow\\
&\quad \mathsf{K}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{C}\mathsf{F}) \;{}_a\!\leftarrow \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}\rangle \;{}^{\;*}_{a,i}\!\leftarrow\\
&\quad \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{K}_1\mathsf{F}_1\Omega, \mathsf{K}\mathsf{F}\Omega\rangle \rightarrow_{s,i}^* \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}\rangle
\end{aligned}
$$

Example

$$
\begin{aligned}
&F_1 \;{}_s\!\leftarrow C_2 F F_1 F_1 \;{}_s\!\leftarrow C_2 F F_1 (C_1 T_1 F_1 (K F \Omega)) \\
&\quad {}_a\!\leftarrow C_2 F F_1 (C_1 (K_1 T_1 F) F_1 (K F \Omega)) \rightarrow_s \\
&\quad C_1 (K_1 T_1 F) F_1 (K F \Omega) \rightarrow_i C_1 (K_1 T_1 F) F_1 F \rightarrow_s^* F_1 \;{}_a\!\leftarrow \\
&\quad K_1 F_1 (C F) \;{}_a\!\leftarrow S^{1,1} K_1 C \langle F_1, F \rangle \;{}_{a,i}^{\;*}\!\leftarrow \\
&\quad S^{1,1} K_1 C \langle K_1 F_1 \Omega, K F \Omega \rangle \rightarrow_{s,i}^* S^{1,1} K_1 C \langle F_1, F \rangle
\end{aligned}
$$

Example

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{F}_1 \ {}_s\!\leftarrow \mathsf{C}_2\mathsf{F}\mathsf{F}_1\mathsf{F}_1 \ {}_s\!\leftarrow \mathsf{C}_2\mathsf{F}\mathsf{F}_1(\mathsf{C}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{K}\mathsf{F}\Omega)) \\
& \quad {}_s\!\leftarrow \mathsf{C}_2\mathsf{F}\mathsf{F}_1(\mathsf{C}_1(\mathsf{K}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F})\mathsf{F}_1(\mathsf{K}\mathsf{F}\Omega)) \rightarrow_s \\
& \quad \mathsf{C}_1(\mathsf{K}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F})\mathsf{F}_1(\mathsf{K}\mathsf{F}\Omega) \rightarrow_i \mathsf{C}_1(\mathsf{K}_1\mathsf{T}_1\mathsf{F})\mathsf{F}_1\mathsf{F} \rightarrow_s^* \mathsf{F}_1 \ {}_a\!\leftarrow \\
& \quad \mathsf{K}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{C}\mathsf{F}) \ {}_a\!\leftarrow \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}\rangle \ {}_{a,i}^{*}\!\leftarrow \\
& \quad \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{K}_1\mathsf{F}_1\Omega, \mathsf{K}\mathsf{F}\Omega\rangle \rightarrow_{s,i}^* \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}\rangle
\end{aligned}
$$

Example

$$
\begin{aligned}
& F_1 \;{}_s\!\leftarrow C_2FF_1F_1 \;{}_s\!\leftarrow C_2FF_1(C_1T_1F_1(KF\Omega)) \\
& \quad {}_s\!\leftarrow C_2FF_1(C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega)) \rightarrow_s \\
& \quad C_1(K_1T_1F)F_1(KF\Omega) \rightarrow_i C_1(K_1T_1F)F_1F \rightarrow_s^* F_1 \;{}_a\!\leftarrow \\
& \quad K_1F_1(CF) \;{}_a\!\leftarrow S^{1,1}K_1C\langle F_1, F\rangle \;{}_{a,i}^{\;*}\!\leftarrow \\
& \quad S^{1,1}K_1C\langle K_1F_1\Omega, KF\Omega\rangle \rightarrow_{s,i}^* S^{1,1}K_1C\langle F_1, F\rangle
\end{aligned}
$$

Example

$$
\begin{array}{l}
F_1 \; {}_{s}\!\leftarrow C_1 T_1 F_1 (KF\Omega) \; {}_{s}\!\leftarrow C_1 (K_1 T_1 F) F_1 (KF\Omega) \\
\quad \rightarrow_i C_1 (K_1 T_1 F) F_1 F \rightarrow_s^* F_1 \; {}_{a}\!\leftarrow \\
\quad K_1 F_1 (CF) \; {}_{a}\!\leftarrow S^{1,1} K_1 C \langle F_1, F \rangle \; {}_{a,i}^{\;*}\!\leftarrow \\
\quad S^{1,1} K_1 C \langle K_1 F_1 \Omega, KF\Omega \rangle \rightarrow_{s,i}^* S^{1,1} K_1 C \langle F_1, F \rangle
\end{array}
$$

Example

$$
\begin{aligned}
& F_1 \; {}_s\!\leftarrow C_1 T_1 F_1 (KF\Omega) \; {}_s\!\leftarrow C_1 (K_1 T_1 F) F_1 (KF\Omega) \\
& \quad \to_i C_1 (K_1 T_1 F) F_1 F \to_s^* F_1 \; {}_a\!\leftarrow \\
& \quad K_1 F_1 (CF) \; {}_a\!\leftarrow S^{1,1} K_1 C \langle F_1, F \rangle \; {}^{*}_{a,i}\!\leftarrow \\
& \quad S^{1,1} K_1 C \langle K_1 F_1 \Omega, KF\Omega \rangle \to_{s,i}^* S^{1,1} K_1 C \langle F_1, F \rangle
\end{aligned}
$$

Example

$$F_1 \;{}_s\!\leftarrow C_1T_1F_1F \;{}_s\!\leftarrow C_1(K_1T_1F)F_1F$$
$$\rightarrow_s^* F_1 \;{}_a\!\leftarrow$$
$$K_1F_1(CF) \;{}_a\!\leftarrow S^{1,1}K_1C\langle F_1, F\rangle \;{}_{a,i}^{*}\!\leftarrow$$
$$S^{1,1}K_1C\langle K_1F_1\Omega, KF\Omega\rangle \rightarrow_{s,i}^* S^{1,1}K_1C\langle F_1, F\rangle$$

Example

$$F_1 \ {}_{s}\!\leftarrow C_1T_1F_1F \ {}_{s}\!\leftarrow C_1(K_1T_1F)F_1F$$
$$\rightarrow_s^* F_1 \ {}_{a}\!\leftarrow$$
$$K_1F_1(CF) \ {}_{a}\!\leftarrow S^{1,1}K_1C\langle F_1, F\rangle \ {}_{a,i}^{\ *}\!\leftarrow$$
$$S^{1,1}K_1C\langle K_1F_1\Omega, KF\Omega\rangle \rightarrow_{s,i}^* S^{1,1}K_1C\langle F_1, F\rangle$$

Example

$$
\begin{aligned}
\mathsf{F}_1 \;{}_a\!\!\leftarrow \mathsf{K}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{CF}) \;{}_a\!\!\leftarrow \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}\rangle \\
{}^{*}_{a,i}\!\!\leftarrow \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{K}_1\mathsf{F}_1\Omega, \mathsf{KF}\Omega\rangle \to^{*}_{s,i} \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}\rangle
\end{aligned}
$$

Example

$$\mathsf{F}_1 \;{}_s\!\!\leftarrow \mathsf{K}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{CF}) \;{}_s\!\!\leftarrow \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}\rangle$$
$$\;{}^{*}_{a,i}\!\!\leftarrow \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{K}_1\mathsf{F}_1\Omega, \mathsf{KF}\Omega\rangle \rightarrow^{*}_{s,i} \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}\rangle$$

Example

$$\mathsf{F}_1 \ {}_{s}\!\leftarrow \mathsf{K}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{C}\mathsf{F}) \ {}_{s}\!\leftarrow \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}\rangle$$

$$\ {}^{*}_{a,i}\!\leftarrow \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{K}_1\mathsf{F}_1\Omega, \mathsf{K}\mathsf{F}\Omega\rangle \rightarrow^{*}_{s,i} \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}\rangle$$

Example

$$\mathsf{F}_1 \;{}_s\!\!\leftarrow \mathsf{K}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{C}(\mathsf{KF}\Omega)) \;{}_s\!\!\leftarrow \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{KF}\Omega\rangle$$
$$ {}_s\!\!\leftarrow \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{K}_1\mathsf{F}_1\Omega, \mathsf{KF}\Omega\rangle \rightarrow^*_{s,i} \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}\rangle$$

Example

$$\mathsf{F}_1 \;{}_s\!\!\leftarrow \mathsf{K}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{C}(\mathsf{KF}\Omega)) \;{}_s\!\!\leftarrow \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{KF}\Omega\rangle$$
$$\;{}_s\!\!\leftarrow \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{K}_1\mathsf{F}_1\Omega, \mathsf{KF}\Omega\rangle \to^*_{s,i} \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}\rangle$$

Example

$$
\begin{aligned}
\mathsf{F}_1 \;{}_{s}\!\leftarrow\; & \mathsf{K}_1\mathsf{F}_1(\mathsf{C}(\mathsf{KF}\Omega)) \;{}_{s}\!\leftarrow\; \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{KF}\Omega\rangle \\
{}_{s}\!\leftarrow\; & \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{K}_1\mathsf{F}_1\Omega, \mathsf{KF}\Omega\rangle \rightarrow^{*}_{s,i} \mathsf{S}^{1,1}\mathsf{K}_1\mathsf{C}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}\rangle
\end{aligned}
$$

Example

$$F_1 \;{}_s\!\leftarrow K_1 F_1 (C F) \;{}_s\!\leftarrow S^{1,1} K_1 C \langle F_1, F \rangle$$

Example

$$F_1 \; {}_s\!\leftarrow K_1 F_1 (CF) \; {}_s\!\leftarrow S^{1,1} K_1 C \langle F_1, F \rangle$$

Coq formalization

The proof has been fully formalized in the Coq proof assistant.

Coq formalization

The proof has been fully formalized in the Coq proof assistant.

- about 7000 LOC, 1 month of full-time work.

Coq formalization

The proof has been fully formalized in the Coq proof assistant.

- about 7000 LOC, 1 month of full-time work.
- Classical logic and choice used (probably could be avoided).

Coq formalization

The proof has been fully formalized in the Coq proof assistant.

- about 7000 LOC, 1 month of full-time work.
- Classical logic and choice used (probably could be avoided).
- Formalization "from scratch": only Coq standard library used,

Coq formalization

The proof has been fully formalized in the Coq proof assistant.

- about 7000 LOC, 1 month of full-time work.
- Classical logic and choice used (probably could be avoided).
- Formalization "from scratch": only Coq standard library used,
- and the CoqHammer tool:
  Ł. Czajka, C. Kaliszyk, Hammer for Coq: Automation for dependent type theory, submitted to JAR, 2017

  `http://cl-informatik.uibk.ac.at/cek/coqhammer/`

Coq formalization

The proof has been fully formalized in the Coq proof assistant.

- about 7000 LOC, 1 month of full-time work.
- Classical logic and choice used (probably could be avoided).
- Formalization "from scratch": only Coq standard library used,
- and the CoqHammer tool:
  Ł. Czajka, C. Kaliszyk, Hammer for Coq: Automation for dependent type theory, submitted to JAR, 2017

  `http://cl-informatik.uibk.ac.at/cek/coqhammer/`
- Formalization available at:

  `http://www.mimuw.edu.pl/~lukaszcz/clc.tar.gz`