# Semantyczne dowody niesprzeczności systemów Illatywnej Logiki Kombinatorycznej

(autoreferat)

Łukasz Czajka

14 stycznia 2015

## 1 Wstęp

Illatywne systemy logiki kombinatorycznej bądź rachunku lambda rozszerzają beztypowy rachunek kombinatorów bądź rachunek lambda o dodatkowe stałe mające na celu reprezentację pojęć logicznych. W istocie wczesne systemy logiki kombinatorycznej i rachunku lambda (zaproponowane przez Schönfinkela [15], Curry'ego [4] i Churcha [2, 3]) miały służyć jako bardzo proste podstawy logiki i matematyki. Jednakże odkrycie paradoksów Kleene'go-Rossera i Curry'ego spowodowało, że większość logików przestała zajmować się tą tematyką.

Sformułowanie odpowiednich systemów illatywnych oraz wykazanie ich niesprzeczności okazało się zadaniem zaskakująco trudnym. Osiągnięte to zostało w pracach [1, 13, 14], gdzie pokazano kilka systemów pełnych dla uniwersalno-implikacyjnego fragmentu intuicjonistycznej logiki pierwszego rzędu. W [9] używając metod semantycznych wykazano niesprzeczność systemu rozszerzającego jeden z systemów z [1, 13, 14]. W tym rozszerzonym systemie da się zinterpretować pełną klasyczną logikę wyższego rzędu.

Trudność w dowodzeniu niesprzeczności systemów illatywnych głównie bierze się stąd, że przy braku systemu typów można formułować dowolne definicje rekurencyjne w których mogą występować operatory logiczne, także negatywnie. We wczesnych systemach z nieograniczoną regułą wprowadzania implikacji było to powodem paradoksu Curry'ego. Sformułowanie odpowiednich i nie nadmiernie uciążliwych ograniczeń jest zadaniem trudnym, jeśli chcemy przy tym zachować możliwość nieograniczonych definicji rekurencyjnych.

### 1.1 Otrzymane wyniki

W pracy wprowadzamy semantykę różnych systemów illatywnej logiki kombinatorycznej i rachunku lambda będących rozszerzeniami niektórych systemów z [1, 13, 14, 9]. Wykazujemy niesprzeczność naszych systemów poprzez konstrukcję modeli. Rozważamy także naturalne translacje tradycyjnych systemów logiki do odpowiadających im systemów illatywnych. Używając metod semantycznych badamy poprawność i pełność tych translacji.

Niektóre spośród systemów których niesprzeczność wykazaliśmy są znacznie silniejsze niż systemy z [1, 13, 14]. W szczególności, najsilniejszy z naszych systemów zawiera pełną ekstensjonalną klasyczną logikę wyższego rzędu rozszerzoną o zależne typy funkcyjne, sumy zależne, podtypy i W-typy.

W większości poprzednich prac podejście jest syntaktyczne – niesprzeczność dowodzona jest przez eliminację cięcia lub przez analizę przy użyciu gramatyk możliwych postaci wyprowadzalnych termów. Wykazanie eliminacji cięcia daje więcej informacji niż tylko konstrukcja modelu, jednak dla systemów illatywnych wydaje się też znacząco trudniejsze. Nasze metody są semantyczne. Dowody niesprzeczności nie są konstruktywne i korzystają istotnie z teorii mnogości.

### 1.2 Motywacje

Z punktu widzenia informatyki, interesującą własnością systemów illatywnych jest to, że bazując na beztypowym rachunku lambda (kombinatorów) włączają one ogólną rekursję do logiki. Zatem nieograniczone definicje rekurencyjne mogą być formułowane bezpośrednio, także możliwie nieufundowane definicje funkcji częściowych. W [10, 11] zostało zasugerowane, że ta własność systemów illatywnej logiki kombinatorycznej czyni ją potencjalnie interesującą jako logikę dla systemu wspomagania dowodzenia mającego być używanym do weryfikacji programów.

Większość popularnych systemów wspomagania dowodzenia zezwala wyłącznie na funkcje całkowite. Całkowitość funkcji musi być zapewniona przez użytkownika poprzez precyzyjne specyfikacje dziedzin, ograniczanie rekursji w sposób gwarantujący terminację, jawne dowody ufundowania, bądź inne sposoby.

Zaletą systemów illatywnych jest to, że nie są w nich wymagane żadne uzasadnienia przy formułowaniu definicji rekurencyjnych. Można po prostu zdefiniować funkcję przez, być może nieufundowaną, rekursję i rozpocząć wnioskowanie o własnościach tej funkcji. Oczywiście jest też wada – niektóre reguły wnioskowania muszą zostać ograniczone poprzez dodanie przesłanek mówiących o tym, że niektóre termy są „zdaniami”. Aby móc wyprowadzać osądy mówiące o tym, że termy są zdaniami, systemy illatywne zawierają pewne „reguły typowania”, tzn., reguły pozwalające wnioskować o typach (kategoriach) do jakich należą termy. Jednak w przeciwieństwie do tradycyjnych systemów, reguły te są jednymi ze zwykłych reguł wnioskowania systemu, a „typy” reprezentowane są przez zwykłe termy. Typy nie muszą być przypisywane a priori. Wnioskowanie o „typach” może być połączone z innym wnioskowaniem. Na przykład możliwe jest wykazywanie typowalności przez indukcję.

## 2 Illatywna logika kombinatoryczna

Rozważane przez nas systemy illatywne występują w trzech wariantach różniących się rachunkiem na którym bazują: jest to albo rachunek kombinatorów ze słabą redukcją, albo rachunek lambda z $\beta$-redukcją, albo rachunek lambda z $\beta\eta$-redukcją, ze stałymi z pewnej ustalonej sygnatury $\Sigma$. Używamy $\mathbb{T}$ do do oznaczenia zbioru termów systemu illatywnego.

Analogicznie używamy $=$ do generycznego oznaczenia $=_w$, $=_\beta$ lub $=_{\beta\eta}$, w zależności od rozpatrywanego wariantu systemu. Przez $\equiv$ oznaczamy identyczność termów (z dokładnością do $\alpha$-konwersji w rachunku lambda). Przez $\mathsf{S}$ i $\mathsf{K}$ oznaczamy odpowiednie stałe w rachunku kombinatorów, lub termy $\lambda xyz.xz(yz)$ i $\lambda xy.x$ w rachunku lambda. Definiujemy $\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK}$. Notacja $\lambda x.M$ jest używana do oznaczenia kombinatorycznej abstrakcji w CL, lub abstrakcji w rachunku lambda. Kładziemy $\pi \equiv \lambda xyz.zxy$, $\pi_1 \equiv \lambda x.x\mathsf{K}$ oraz $\pi_2 \equiv \lambda x.x(\mathsf{KI})$.

Systemy illatywne rozszerzają rachunek kombinatorów (bądź rachunek lambda) o *termy illatywne* będące termami reprezentującymi pojęcia logiczne. W przeciwieństwie do większości tradycyjnych systemów logiki, nie ma rozróżnienia a priori pomiędzy różnymi kategoriami: zdaniami (formułami), termami indywiduowymi, funkcjami, relacjami, itd. Są za to reguły wnioskowania pozwalające na kategoryzacje *wewnątrz* systemu. Pewne termy illatywne reprezentują bazowe typy[1] (kategorie). Występują też kombinatory pozwalające na formowanie nowych typów. Jeśli term $T$ reprezentuje typ, to $TX$ jest asercją mówiącą, że $X$ ma typ $T$. Każdy term może być potencjalnie traktowany jako zdanie (co nie oznacza, że wszystkie termy reprezentują zdania), a termy równe (w sensie słabej, $\beta$-, lub $\beta\eta$-równości) są zawsze wzajemnie wymienialne. Intuicyjnie, typy reprezentują dozwolone zasięgi kwantyfikatorów – kwantyfikacja jest dozwolona tylko po elementach określonego typu. Predykaty na typie $T$, lub podzbiory $T$, są reprezentowane przez funkcje z $T$ do typu zdań $\mathsf{H}$.

Termy illatywne nie muszą być stałymi – mogą być też termami złożonymi. Term illatywny będący stałą nazywamy *stałą illatywną*. Poniżej wymieniamy niektóre często występujące termy illatywne wraz z nieformalnym wyjaśnieniem ich znaczenia (cf. [6, §12B2]). Dany system illatywny może zawierać dowolne z poniższych termów illatywnych, a być może też jakieś inne. Poniżej $X, Y, Z, \ldots$ oznaczają dowolne termy z $\mathbb{T}$.

- $\mathsf{P}$ Implikacja. Zamiast $\mathsf{P}XY$ często pisze się $X \supset Y$. Implikacja jest czasem definiowana przez $\mathsf{P} \equiv \lambda xy.\Xi(\mathsf{K}x)(\mathsf{K}y)$ (patrz niżej po wyjaśnienie $\Xi$).
- $\mathsf{\Lambda}$ Koniunkcja. Zamiast $\mathsf{\Lambda}XY$ często pisze się $X \wedge Y$.
- $\mathsf{V}$ Dysjunkcja. Zamiast $\mathsf{V}XY$ często pisze się $X \vee Y$.
- $\neg$ Negacja.
- $\bot$ Zdanie fałszywe.
- $\top$ Zdanie prawdziwe. Często definiowane przez $\top \equiv \mathsf{P}\bot\bot$.
- $\Xi$ Ograniczony kwantyfikator uniwersalny. Term $\Xi XY$ intuicyjnie interpretujemy jako „$X \subseteq Y$”, lub „dla każdego $Z \in \mathbb{T}$, jeśli $XZ$ to $YZ$”, lub „dla każdego elementu $Z$ typu $X$ mamy $YZ$”. Notacja $\forall x : X . Y$ jest często używana do oznaczenia $\Xi X(\lambda x.Y)$. Zauważmy, że $x$ nie jest związany w $X$.
- $\mathsf{X}$ Ograniczony kwantyfikator egzystencjalny. Term $\mathsf{X}YZ$ intuicyjnie interpretujemy jako „istnieje takie $X \in \mathbb{T}$, że $YX$ i $ZX$”, lub „istnieje element $X$ typu $Y$ spełniający $ZX$”. Notacja $\exists x : Y . Z$ jest często używna do oznaczenia $\mathsf{X}Y\lambda x.Z$. Zauważmy, że $x$ nie jest związany w $X$.

[1] Pojęcie „typu” jest tu używane nieformalnie, zamiennie z pojęciem „kategorii”.

$\mathsf{F}$ Funkcjonalność (cf. [5, §8C]). Term $\mathsf{F}XYF$ interpretujemy jako „$F$ jest funkcją z $X$ do $Y$", lub „dla każdego elementu $Z$ typu $X$ mamy $Y(FZ)$". Funkcjonalność jest często definiowana przez $\mathsf{F} \equiv \lambda xyf.\Xi x(\lambda z.y(fz))$.

$\mathsf{G}$ Funkcjonalność zależna. Term $\mathsf{G}XYF$ interpretujemy jako „$F$ jest funkcją zależną która dla każdego $Z$ typu $X$ daje element typu $YZ$", lub „dla każdego elementu $Z$ typu $X$ mamy $YZ(FZ)$". Funkcjonalność zależna jest często definiowana przez $\mathsf{G} \equiv \lambda xyf.\Xi x(\lambda z.yz(fz))$.

$\mathsf{F}_n$ Funkcjonalność $n$-argumentowa. Term $\mathsf{F}_n X_1 \dots X_n YF$ interpretujemy jako „$F$ jest $n$-argumentową funkcją z $X_1, \dots, X_n$ do $Y$". Zwykle $\mathsf{F}_n$ jest zdefiniowane indukcyjnie:

$$\begin{aligned} \mathsf{F}_0 &\equiv \mathsf{I} \\ \mathsf{F}_{n+1} &\equiv \lambda x_1 \dots x_{n+1} y.\mathsf{F} x_1(\mathsf{F}_n x_2 \dots x_{n+1} y) \end{aligned}$$

$\mathsf{H}$ Typ zdań. Term $\mathsf{H}X$ interpretujemy jako „$X$ jest zdaniem". Typ zdań jest czasem definiowany przez $\mathsf{H} \equiv \lambda x.\mathsf{P}xx$ lub przez $\mathsf{H} \equiv \lambda x.\mathsf{L}(\mathsf{K}x)$.

$\mathsf{L}$ Kategoria typów. Term $\mathsf{L}X$ interpretujemy jako „$X$ jest typem" lub „$X$ reprezentuje dozwoloną dziedzinę kwantyfikacji". Kategoria typów jest czasem definiowana przez $\mathsf{L} \equiv \lambda x.\Xi xx$.

$\mathsf{A}$ Typ indywiduowy.

$\mathsf{O}$ Typ pusty. Często definiowany przez $\mathsf{O} \equiv \mathsf{K}\bot$.

$\epsilon$ Operator wyboru. Term $\epsilon AX$ interpretujemy jako pewien nieokreślony element $A$ spełniający predykat $X$, jeśli taki element istnieje.

$\Upsilon$ Konstruktor podtypów. Term $\Upsilon AX$ interpretujemy jako podtyp $A$ składający się ze wszystkich elementów $Y$ typu $A$ dla których zachodzi $XY$. Konstruktor podtypów często definiujemy przez $\Upsilon \equiv \lambda xyz.xz \wedge yz$.

$\Sigma$ Konstruktor sum zależnych. Term $\Sigma ABX$ interpretujemy jako: „$\pi_1 X$ ma typ $A$ i $\pi_2 X$ ma typ $B(\pi_1 X)$". Konstruktor sum zależnych często definiujemy przez $\Sigma \equiv \lambda xyz.x(\pi_1 z) \wedge y(\pi_1 z)(\pi_2 z)$.

$\mathsf{W}$ Konstruktor W-typów. Term $\mathsf{W}AB$ interpretujemy jako W-typ: typ wszystkich dobrze ufundowanych drzew z wierzchołkami etykietowanymi elementami typu $A$ i rozgałęzieniem wyspecyfikowanym przez $Ba$ dla wierzchołka etykietowanego $a$, tzn., wierzchołek etykietowany $a$ ma osobne dziecko dla każdego elementu typu $Ba$.

Używając termów illatywnych można zinterpretować zwykłą logikę w illatywnej logice kombinatorycznej. Na przykład, zdanie logiki pierwszego rzędu

$$\forall x(r(x) \to s(f(x), g(x)) \wedge r(f(x)))$$

tłumaczy sie na

$$\forall x : \mathsf{A} \,.\, rx \supset s(fx)(gx) \wedge r(fx)$$

czyli

$$\Xi\mathsf{A}(\lambda x.\mathsf{P}(rx)(\mathsf{\Lambda}(s(fx)(gx))(r(fx))))$$

gdzie $r, s, f, g$ są stałymi odpowiadającymi symbolom relacyjnym i funkcyjnym z języka logiki pierwszego rzędu, a $\mathsf{A}$ reprezentuje uniwersum.

W systemie illatywnym osądy mają postać $\Gamma \vdash X$ gdzie $\Gamma$ jest skończonym zbiorem termów a $X$ jest termem. Jeśli $X$ jest termem a $\Gamma$ zbiorem termów, to przez $\Gamma, X$ oznaczamy $\Gamma \cup \{X\}$. Dla nieskończonego zbioru termów $\Gamma$ piszemy $\Gamma \vdash X$ gdy istnieje skończony podzbiór $\Gamma' \subseteq \Gamma$ spełniający $\Gamma' \vdash X$.

Wszystkie systemy illatywne muszą zawierać następujący aksjomat (Ax) oraz regułę (Eq). W istocie reguła (Eq) wprowadza do systemu nieograniczoną rekursję.

$$\frac{}{\Gamma, X \vdash X}\ (\mathrm{Ax}) \qquad \frac{\Gamma \vdash X \quad X = Y}{\Gamma \vdash Y}\ (\mathrm{Eq})$$

Powyżej $X = Y$ jest warunkiem na meta-poziomie. Przypomnijmy, że $=$ oznacza słabą, $\beta$-, lub $\beta\eta$-równość, w zależności od rozpatrywanego wariantu systemu.

Jeśli system illatywny zawiera jeden z termów illatywnych $\mathsf{P}$, $\Xi$, $\mathsf{F}$, $\mathsf{G}$, to żądamy także aby zawierał następujące reguły eliminacji (bezpośrednio lub jako reguły wyprowadzalne).

$$\frac{\Gamma \vdash X \supset Y \quad \Gamma \vdash X}{\Gamma \vdash Y}\ (\mathsf{PE}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Xi XY \quad \Gamma \vdash XZ}{\Gamma \vdash YZ}\ (\Xi\mathrm{E})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathsf{F}XYF \quad \Gamma \vdash XZ}{\Gamma \vdash Y(FZ)}\ (\mathsf{FE}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathsf{G}XYF \quad \Gamma \vdash XZ}{\Gamma \vdash YZ(FZ)}\ (\mathsf{GE})$$

Nie jest jasne natomiast jak powinny wyglądać reguły wprowadzania. Z paradoksu Curry'ego wynika, że dodanie poniższej naturalnej reguły wprowadzania dla $\mathsf{P}$ prowadzi do sprzeczności.

$$\frac{\Gamma, X \vdash Y}{\Gamma \vdash X \supset Y}\ (\mathrm{DED})$$

Intuicyjnie, problem polega na tym, że a priori nie wiemy czy $X$ jest zdaniem, więc $X \supset Y$ może nie mieć żadnego sensu. Gdy $X = (X \supset Y)$ to używając powyższej reguły można uzyskać sprzeczność.

Sposobem na uniknięcie paradoksu jest dodanie termu illatywnego $\mathsf{H}$, odpowiednie ograniczenie reguł wprowadzania, i dodanie reguł umożliwiających wnioskowanie o tym, które termy reprezentują zdania. Oczywiście chcielibyśmy aby ograniczenia w regułach wprowadzania były jak najmniej uciążliwe. Nie byłoby zbyt trudnym zadaniem sformułowanie i wykazanie niesprzeczności systemu „illatywnego" w którym ograniczenia w regułach wprowadzania byłyby tak silne, że w istocie nie różniłby się on wiele od systemów w których termom przypisuje się typy a priori. Jednak wątpliwym jest sens badania takiego systemu.

# 3 Przegląd wyników

## 3.1 Systemy illatywne

Podamy teraz przegląd systemów illatywnych których niesprzeczność została wykazana w naszej pracy. Nie podajemy tutaj wszystkich reguł naszych systemów, a także niektóre reguły nieznacznie różnią się od tych używanych w pracy. Celem jest tu danie czytelnikowi ogólnego wyobrażenia o tym jak nasze systemy wyglądają i jakie są ich istotne własności.

Głównym obiektem naszych badań są cztery systemy illatywne: system zdaniowy $\mathcal{I}$Kp, system pierwszego rzędu $\mathcal{I}$K, system wyższego rzędu $e\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$, oraz rozszerzony system wyższego rzędu $\mathcal{I}^+$. Wszystkie te systemy są klasyczne. Badamy także intuicjonistyczny wariant $\mathcal{I}$Jp ($\mathcal{I}$J) systemu $\mathcal{I}$Kp ($\mathcal{I}$K), oraz intensjonalny wariant $\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$ systemu $e\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$. System $\mathcal{I}$Jp zawiera termy illatywne $\mathsf{P}, \mathsf{V}, \mathsf{\Lambda}, \neg, \top, \bot, \mathsf{H}$. Większość reguł $\mathcal{I}$Jp została pokazana na rysunku 1. System $\mathcal{I}$J rozszerza $\mathcal{I}$Jp o termy illatywne $\Xi, \mathsf{X}, \mathsf{A}$ oraz, między innymi, reguły z rysunku 2. System $\mathcal{I}$Kp ($\mathcal{I}$K) rozszerza $\mathcal{I}$Jp ($\mathcal{I}$J) o regułę wyłączonego środka:

$$\frac{\Gamma \vdash \mathsf{H}X}{\Gamma \vdash X \vee \neg X}\ (\mathrm{EM})$$

System $\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$ rozszerza $\mathcal{I}$K o reguły ($\mathsf{HL}$) i ($\mathsf{FL}$) z rysunku 3. System $e\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$ rozszerza $\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$ o ($\mathrm{Ext}_f$) i ($\mathrm{Ext}_b$). System $\mathcal{I}^+$ rozszerza $\mathcal{I}$K o wszystkie reguły z rysunku 3, oraz kilka innych pominiętych na rysunkach reguł.

Na rysunku 3 używamy skrótów dla $\mathsf{O}$, $\mathsf{F}$, $\mathsf{G}$, $\Upsilon$ i $\Sigma$ zdefiniowanych w poprzedniej sekcji. Używamy też notacji $X =_A Y$ dla $\forall p : \mathsf{F}A\mathsf{H} \,.\, pX \supset pY$, co reprezentuje równość Leibniza w typie $A$. W regule ($\mathsf{WInd}$) zakładamy $x, y, z \notin \mathrm{FV}(\Gamma, A, B, Z)$.

Reguły pominięte na rysunkach są głównie dodatkowymi regułami odnoszącymi się do $\mathsf{H}$, które powodują, że nasze logiki są pełne ze względu na odpowiednie semantyki. Niektóre reguły pominięte przy powyższym opisie $\mathcal{I}^+$ umożliwiają wyprowadzenie odpowiednich nieograniczonych reguł indukcji dla typów indukcyjnych zdefiniowanych przez W-typy.

## 3.2 Semantyka

Naszkicujemy teraz semantykę naszych systemów illatywnych. Modele systemów intuicjonistycznych są w istocie kombinacjami algebr kombinatorycznych ze strukturami Kripkego. Modele systemów klasycznych są algebrami kombinatorycznymi z dwoma zbiorami $\mathcal{T}$ oraz $\mathcal{F}$ prawdziwych oraz fałszywych elementów algebry. Na zbiory $\mathcal{T}$ i $\mathcal{F}$ nakładamy pewne naturalne warunki. W pracy dowodzimy, że każdy z systemów illatywnych jest poprawne ze względu na odpowienią semantykę. Pokazujemy też, że systemy $\mathcal{I}$Jp, $\mathcal{I}$Kp i $\mathcal{I}$J są dodatkowo pełne. Wykazane jest ponadto, że system $\mathcal{I}$K jest pełny ze względu na nieco mniej naturalną klasę modeli, które są kombinacjami algebr kombinatorycznych ze specjalnymi strukturami Kripkego.

Tutaj podamy szczegółowe definicje modeli tylko dla najprostszych przypadków semantyki systemów $\mathcal{I}$Jp i $\mathcal{I}$Kp w wariancie bazującym na rachunku kombinatorów ze słabą równością.

$$\frac{}{\Gamma, X \vdash X}\ (\mathrm{Ax}) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{H}\bot}\ (\bot\mathsf{HI})$$

$$\frac{\Gamma, X \vdash Y \quad \Gamma \vdash \mathsf{H}X}{\Gamma \vdash X \supset Y}\ (\mathsf{PI}) \qquad \frac{\Gamma \vdash X \quad \Gamma \vdash X \supset Y}{\Gamma \vdash Y}\ (\mathsf{PE})$$

$$\frac{\Gamma, X \vdash \mathsf{H}Y \quad \Gamma \vdash \mathsf{H}X}{\Gamma \vdash \mathsf{H}(X \supset Y)}\ (\mathsf{PHI})$$

$$\frac{\Gamma \vdash X \quad \Gamma \vdash Y}{\Gamma \vdash X \wedge Y}\ (\mathsf{\Lambda}\mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash X \wedge Y}{\Gamma \vdash X}\ (\mathsf{\Lambda}\mathrm{E}_l) \quad \frac{\Gamma \vdash X \wedge Y}{\Gamma \vdash Y}\ (\mathsf{\Lambda}\mathrm{E}_r)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathsf{H}X \quad \Gamma, X \vdash \mathsf{H}Y}{\Gamma \vdash \mathsf{H}(X \wedge Y)}\ (\mathsf{\Lambda HI}_l) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathsf{H}Y \quad \Gamma, Y \vdash \mathsf{H}X}{\Gamma \vdash \mathsf{H}(X \wedge Y)}\ (\mathsf{\Lambda HI}_r)$$

$$\frac{\Gamma \vdash X}{\Gamma \vdash X \vee Y}\ (\mathsf{VI}_l) \quad \frac{\Gamma \vdash Y}{\Gamma \vdash X \vee Y}\ (\mathsf{VI}_r) \qquad \frac{\Gamma \vdash X \vee Y \quad \Gamma, X \vdash Z \quad \Gamma, Y \vdash Z}{\Gamma \vdash Z}\ (\mathsf{V}\mathrm{E})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathsf{H}X \quad \Gamma \vdash \mathsf{H}Y}{\Gamma \vdash \mathsf{H}(X \vee Y)}\ (\mathsf{VHI})$$

$$\frac{\Gamma \vdash X}{\Gamma \vdash \mathsf{H}X}\ (\mathsf{HI}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash X}\ (\bot\mathrm{E})$$

$$\frac{\Gamma \vdash X \quad X = Y}{\Gamma \vdash Y}\ (\mathrm{Eq})$$

Rysunek 1: Podstawowe reguły

$$\frac{\Gamma, Xx \vdash Yx \quad \Gamma \vdash \mathsf{L}X \quad x \notin \mathrm{FV}(\Gamma, X, Y)}{\Gamma \vdash \Xi XY}\ (\Xi\mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Xi XY \quad \Gamma \vdash XZ}{\Gamma \vdash YZ}\ (\Xi\mathrm{E})$$

$$\frac{\Gamma, Xx \vdash \mathsf{H}(Yx) \quad \Gamma \vdash \mathsf{L}X \quad x \notin \mathrm{FV}(\Gamma, X, Y)}{\Gamma \vdash \mathsf{H}(\Xi XY)}\ (\Xi\mathsf{HI}) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{LA}}\ (\mathsf{AL})$$

$$\frac{\Gamma \vdash MZ \quad \Gamma \vdash NZ \quad \Gamma \vdash \mathsf{L}M}{\Gamma \vdash \mathsf{X}MN}\ (\mathsf{XI})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathsf{X}MN \quad \Gamma, Mx, Nx \vdash Z \quad x \notin \mathrm{FV}(\Gamma, M, N, Z)}{\Gamma \vdash Z}\ (\mathsf{X}\mathrm{E})$$

$$\frac{\Gamma, Mx \vdash \mathsf{H}(Nx) \quad \Gamma \vdash \mathsf{L}M \quad x \notin \mathrm{FV}(\Gamma, M, N)}{\Gamma \vdash \mathsf{H}(\mathsf{X}MN)}\ (\mathsf{XHI})$$

Rysunek 2: Reguły dla kwantyfikatorów ($\Xi$ i $\mathsf{X}$)

*Zdaniowa illatywna algebra kombinatoryczna* (PICA) to krotka

$$\mathcal{C} = \langle C, \cdot, \mathsf{k}, \mathsf{s}, \mathsf{h}, \mathsf{p}, \wedge, \vee, \neg, \bot \rangle$$

gdzie $\langle C, \cdot, \mathsf{k}, \mathsf{s} \rangle$ jest algebrą kombinatoryczną oraz $\mathsf{h}, \mathsf{p}, \wedge, \vee, \neg, \bot \in C$, tzn., jest to po prostu algebra kombinatoryczna z wyróżnionymi elementami $\mathsf{h}, \mathsf{p}, \wedge, \vee, \neg, \bot$. Dla danej PICA $\mathcal{C}$ często używamy $\mathcal{C}$ zamiennie z $C$.

$\mathcal{I}$Jp-*model* jest krotką $\mathcal{S} = \langle \mathcal{C}, I, S, \leq, \sigma_0, \sigma_1 \rangle$ gdzie:

- $\mathcal{C}$ jest zdaniową illatywną algebrą kombinatoryczną spełniającą $\mathsf{h} \cdot a = \mathsf{p} \cdot a \cdot a$ i $\neg \cdot a = \mathsf{p} \cdot a \cdot \bot$ dla dowolnego $a \in \mathcal{C}$,
- $I$ jest funkcją z $\Sigma$ do $\mathcal{C}$ dającą interpretację stałych,
- $S$ jest niepustym zbiorem stanów,
- $\leq$ jest porządkiem częściowym na $S$,
- $\sigma_0$ i $\sigma_1$ są funkcjami z $\mathcal{C}$ do $\mathbb{P}(S)$, spełniającymi poniższe warunki dla $a, b \in \mathcal{C}$, gdzie $\sigma_h(a) = \sigma_0(a) \cup \sigma_1(a)$:
  1. $\sigma_h(a)$ i $\sigma_1(a)$ są domknięte w górę[2] ze względu na $\leq$,
  2. $\sigma_0(\bot) = S$,
  3. $\sigma_0(a) \cap \sigma_1(a) = \emptyset$,
  4. $\sigma_1(\vee \cdot a \cdot b) = \sigma_1(a) \cup \sigma_1(b)$,
  5. $\sigma_0(\vee \cdot a \cdot b) = \sigma_0(a) \cap \sigma_0(b)$,

[2] Zbiór $A \subseteq S$ jest domknięty w górę ze względu na $\leq$ wtw $s \in A$ i $s' \geq s$ implikują $s' \in A$.

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{LH}}\ (\mathsf{HL}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathsf{L}X \quad \Gamma, Xx \vdash \mathsf{L}Y \quad x \notin \mathrm{FV}(\Gamma, X, Y)}{\Gamma \vdash \mathsf{L}(\mathsf{F}XY)}\ (\mathsf{FL})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x : A \,.\, Xx =_B Yx \quad x \notin \mathrm{FV}(X, Y, A, B)}{\Gamma \vdash X =_{\mathsf{F}AB} Y}\ (\mathrm{Ext}_f)$$

$$\frac{\Gamma \vdash X \supset Y \quad \Gamma \vdash Y \supset X}{\Gamma \vdash X =_H Y}\ (\mathrm{Ext}_b)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathsf{L}A \quad \Gamma, Ax \vdash \mathsf{L}(Bx) \quad x \notin \mathrm{FV}(\Gamma, A, B)}{\Gamma \vdash \mathsf{L}(\mathsf{G}AB)}\ (\mathsf{GL})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x : A \,.\, Xx =_{Bx} Yx \quad x \notin \mathrm{FV}(X, Y, A, B)}{\Gamma \vdash X =_{\mathsf{G}AB} Y}\ (\mathrm{Ext}_g)$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{LO}}\ (\mathsf{OL}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathsf{L}A \quad \Gamma \vdash \mathsf{F}A\mathsf{L}B}{\Gamma \vdash \mathsf{L}(\Sigma AB)}\ (\Sigma\mathsf{L})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathsf{L}A \quad \Gamma \vdash \mathsf{F}A\mathsf{L}B}{\Gamma \vdash \mathsf{L}(\mathsf{W}AB)}\ (\mathsf{WL}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathsf{L}A \quad \Gamma \vdash \mathsf{F}A\mathsf{H}X}{\Gamma \vdash \mathsf{L}(\Upsilon AX)}\ (\Upsilon\mathsf{L})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathsf{X}AX \quad \Gamma \vdash \mathsf{F}A\mathsf{H}X}{\Gamma \vdash X(\epsilon AX)}\ (\epsilon\mathrm{I}_l) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathsf{X}AA \quad \Gamma \vdash \mathsf{F}A\mathsf{H}X}{\Gamma \vdash A(\epsilon AX)}\ (\epsilon\mathrm{I}_r)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(\pi_1 X) \quad \Gamma \vdash \mathsf{F}(B(\pi_1 X))(\mathsf{W}AB)(\pi_2 X)}{\Gamma \vdash \mathsf{W}ABX}\ (\mathsf{WI})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathsf{W}ABX}{\Gamma \vdash A(\pi_1 X)}\ (\mathsf{WE}_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathsf{W}ABX}{\Gamma \vdash \mathsf{F}(B(\pi_1 X))(\mathsf{W}AB)(\pi_2 X)}\ (\mathsf{WE}_2)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathsf{L}(\mathsf{W}AB) \quad \Gamma, Ax, \mathsf{F}(Bx)(\mathsf{W}AB)y, \forall z{:}Bx.X(yz) \vdash X(\sup(\mathsf{W}AB)xy)}{\Gamma \vdash \Xi(\mathsf{W}AB)X}\ (\mathrm{WInd})$$

(w (WInd) zakładamy $x, y, z \notin \mathrm{FV}(\Gamma, A, B, X)$)

$$\frac{\Gamma \vdash \pi_1 X =_A \pi_1 Y \quad \Gamma \vdash \pi_2 X =_{B(\pi_1 X)} \pi_2 Y \quad \Gamma \vdash \mathsf{L}(\Sigma AB)}{\Gamma \vdash X =_{\Sigma AB} Y}\ (\mathrm{Ext}_s)$$

Rysunek 3: Dodatkowe reguły

6. $\sigma_1(\wedge \cdot a \cdot b) = \sigma_1(a) \cap \sigma_1(b)$,
7. $s \in \sigma_0(\wedge \cdot a \cdot b)$ wtw
   - $s \in \sigma_0(a)$ i dla każdego $s' \geq s$ takiego, że $s' \in \sigma_1(a)$ zachodzi $s' \in \sigma_h(b)$, lub
   - $s \in \sigma_0(b)$ i dla każdego $s' \geq s$ takiego, że $s' \in \sigma_1(b)$ zachodzi $s' \in \sigma_h(a)$,
8. $s \in \sigma_1(\mathsf{p} \cdot a \cdot b)$ wtw
   - $s \in \sigma_h(a)$ i dla każdego $s' \geq s$ takiego, że $s' \in \sigma_1(a)$ zachodzi $s' \in \sigma_1(b)$, lub
   - $s \in \sigma_1(b)$,
9. $s \in \sigma_0(\mathsf{p} \cdot a \cdot b)$ wtw
   - $s \in \sigma_h(a)$, i
   - dla każdego $s' \geq s$ takiego, że $s' \in \sigma_1(a)$ zachodzi $s' \in \sigma_h(b)$, i
   - istnieje $s' \geq s$ takie, że $s' \in \sigma_1(a)$ i $s' \in \sigma_0(b)$.

Intuicyjnie, $s \in \sigma_1(a)$ oznacza, że $a$ jest prawdziwym zdaniem w stanie $s$, a $s \in \sigma_0(a)$ oznacza, że w stanie $s$, element $a$ jest zdaniem, o którym nie wiadomo, czy jest prawdziwe. Więc $s \in \sigma_h(a) = \sigma_0(a) \cup \sigma_1(a)$ oznacza, że $a$ jest zdaniem w stanie $s$. Zatem jeśli $s \in \sigma_0(a)$ to może się zdarzyć, że $s' \in \sigma_1(a)$ dla pewnego $s' \geq s$. Zdanie które nie jest prawdziwe może stać się prawdziwe gdy rozszerzymy naszą wiedzę. Jednakże, jeśli $s \in \sigma_0(a)$ to $s' \in \sigma_0(a) \cup \sigma_1(a)$ dla dowolnego $s' \geq s$, bo wiedza jest monotoniczna – jak już dowiemy się, że $a$ jest zdaniem, to będzie ono zdaniem w każdym przyszłym stanie wiedzy. Jeśli $a$ jest zdanie które nie jest prawdziwe, to w dowolnym przyszłym stanie może albo pozostać nieprawdziwe albo stać się prawdziwe. To, że $a$ jest fałszywe w stanie $s$ wyrażamy przez $s \in \sigma_1(\mathsf{p} \cdot a \cdot \bot)$, tzn., jego negacja jest prawdziwa, a nie przez $s \in \sigma_0(a)$. Zdanie jest fałszywe w stanie $s$ jeśli jest zdaniem które nie jest prawdziwe w żadnym stanie $s' \geq s$. Jeśli $s \in \sigma_h(a)$, tzn., $a$ jest zdaniem w stanie $s$, to $a$ jest „zawsze ostatecznie poznawalne”, tzn., jakbyśmy nie rozszerzali naszej wiedzy, zawsze jest możliwe dalsze jej rozszerzenie w taki sposób, aby $a$ stało się prawdziwe lub fałszywe.

Zauważmy, że warunki na $\sigma_1$ i $\sigma_0$ powyżej nie są definicją $\sigma_1$ czy $\sigma_0$, ale tylko pewnymi własnościami, które chcemy, żeby $\sigma_1$ i $\sigma_0$ spełniały. Ze względy na kombinatoryczną zupełność $\mathcal{C}$ nie jest oczywiste, że istnieje struktura spełniająca powyższe warunki.

$\mathcal{I}$Kp-*model* jest to $\mathcal{I}$Jp-model z dokładnie jednym stanem $s_0$. Dla $\mathcal{I}$Kp-modeli używamy skrótów $\mathcal{T} = \{a \mid s_0 \in \sigma_1(a)\}$ i $\mathcal{F} = \{a \mid s_0 \in \sigma_0(a)\}$. Zauważmy, że PICA $\mathcal{C}$ oraz zbiory $\mathcal{T}$ i $\mathcal{F}$ jednoznacznie determinują $\mathcal{I}$Kp-model. Przeformułujemy teraz warunki na $\sigma_0$ i $\sigma_1$ w terminach $\mathcal{T}$ i $\mathcal{F}$:

1. $\bot \in \mathcal{F}$,
2. $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \emptyset$.
3. $\vee \cdot a \cdot b \in \mathcal{T}$ wtw, gdy $a \in \mathcal{T}$ lub $b \in \mathcal{T}$,
4. $\vee \cdot a \cdot b \in \mathcal{F}$ wtw, gdy $a \in \mathcal{F}$ i $b \in \mathcal{F}$,
5. $\wedge \cdot a \cdot b \in \mathcal{T}$ wtw, gdy $a \in \mathcal{T}$ i $b \in \mathcal{T}$,
6. $\wedge \cdot a \cdot b \in \mathcal{F}$ wtw, gdy $a \in \mathcal{F}$ lub $b \in \mathcal{F}$,
7. $\mathsf{p} \cdot a \cdot b \in \mathcal{T}$ wtw, gdy $a \in \mathcal{F}$ lub $b \in \mathcal{T}$,

8. $\mathsf{p} \cdot a \cdot b \in \mathcal{F}$ wtw, gdy $a \in \mathcal{T}$ i $b \in \mathcal{F}$.

Pojęcia $\mathcal{I}$J-modeli i $\mathcal{I}$K-modeli są definiowane w sposób podobny do definicji, odpowiednio, $\mathcal{I}$Jp-modeli i $\mathcal{I}$Kp-modeli. W analogiczny sposób definiujemy też $\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$-, $e\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$- i $\mathcal{I}^+$-modele. $\mathcal{I}$K-modele Kripkego definiujemy jako $\mathcal{I}$J-modele spełniające prawo wyłączonego środka dla dowolnego stanu $s$ i elementu $a$: jeśli $s\sigma_h(a)$ to $s \in \sigma_1(a)$ lub $s \in \sigma_1(\mathsf{p} \cdot a \cdot \bot)$.

Notacje $\Gamma \models_{\mathcal{I}\mathrm{Jp}} X$, $\Gamma \models_{\mathcal{I}\mathrm{Kp}} X$, $\Gamma \models_{\mathcal{I}\mathrm{J}} X$, itd., definiowane są w standardowy sposób. Używamy $\models_{k\mathcal{I}\mathrm{K}}$ do oznaczenia relacji semantycznej konsekwencji ze względu na $\mathcal{I}$K-modele Kripkego. Twierdzenia 4.1.8, 4.1.11, 4.1.14, 4.1.16, 5.1.7, 5.1.11, 5.1.13, 5.1.15, 5.1.16, 6.1.6 i 7.1.9 z pracy można połączyć w następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 1** (Poprawność i pełność ze względu na odpowiednie semantyki)**.**

1. *Jeśli $\mathcal{I}$ jest jednym z $\mathcal{I}\mathrm{Jp}$, $\mathcal{I}\mathrm{Kp}$ lub $\mathcal{I}\mathrm{J}$, to warunek $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} X$ jest równoważny $\Gamma \models_{\mathcal{I}} X$, tzn., system $\mathcal{I}$ jest poprawny i pełny ze względu na odpowiednią semantykę.*
2. *Warunek $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}\mathrm{K}} X$ jest równoważny $\Gamma \models_{k\mathcal{I}\mathrm{K}} X$, tzn., system $\mathcal{I}\mathrm{K}$ jest poprawny i pełny ze względu na semantykę bazującą na $\mathcal{I}$K-modelach Kripkego.*
3. *Jeśli $\mathcal{I}$ jest jednym z $\mathcal{I}\mathrm{K}$, $\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$, $e\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$ lub $\mathcal{I}^+$, to warunek $\Gamma \vdash_{\mathcal{I}} X$ implikuje $\Gamma \models_{\mathcal{I}} X$, tzn., system $\mathcal{I}$ jest poprawny ze względu na odpowiednią semantykę.*

Standardowy dowód pełności w stylu Henkina nie może być łatwo zaadaptowany do klasycznych systemów illatywnych z kwantyfikatorami, ze względu na fakt, że prawo wyłączonego środka zachodzi tylko dla termów $X$ dla których $\mathsf{H}X$ jest dowodliwe. Dlatego właśnie dowodzimy jedynie poprawności dla systemów $\mathcal{I}\mathrm{K}$, $\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$, $e\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$ i $\mathcal{I}^+$. System $\mathcal{I}\mathrm{K}$ jest pełny ze względu na zmodyfikowaną semantykę klasyczną ($\mathcal{I}$K-modele Kripkego) która pozwala na więcej niż jeden stan.

## 3.3 Translacje

W pracy pokazujemy translacje tradycyjnych systemów logiki do odpowiadających im systemów illatywnych. Dowodzimy, że wszystkie te translacje są poprawne, tzn., jeśli osąd tradycyjnego systemu jest dowodliwy, to jego translacja także. Dla $\mathcal{I}\mathrm{Jp}$, $\mathcal{I}\mathrm{Kp}$, $\mathcal{I}\mathrm{J}$ i $\mathcal{I}\mathrm{K}$ pokazujemy też, że translacje są pełne, tzn., jeśli translacja osądu jest dowodliwa, to oryginalny osąd także. Dla $\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$ i $e\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$ uzyskaliśmy tylko ograniczony wynik o pełności: jeśli translacja osądu logiki wyższego rzędu jest dowodliwa w $e\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$, to ten osąd jest prawdziwy we wszystkich standardowych modelach logiki wyższego rzędu. Dowody tych rezultatów przeprowadzone są semantycznie, poprzez pokazanie transformacji, zachowujących prawdziwość, modeli illatywnych systemów do modeli odpowiadających systemów tradycyjnych, i na odwrót.

Aby dać czytelnikowi ogólne pojęcie o tym jak wyglądają rozważane przez nas translacje, podajemy definicję translacji klasycznej logiki pierwszego rzędu do $\mathcal{I}$K. Same definicje translacji są podobne do tych z [1, 13, 14]. Zakładamy, że wszystkie symbole funkcyjne i relacyjne sygnatury logiki pierwszego rzędu występują jako stałe w $\mathcal{I}$K, oraz wszystkie zmienne logiki pierwszego rzędu występują jako zmienne w $\mathcal{I}$K. Definiujemy funkcję $\lceil - \rceil$ z zbioru termów i formuł pierwszego rzędu do zbioru termów $\mathbb{T}$ systemu $\mathcal{I}$K, a także funckję kontekstu $\Gamma(-)$ z rodziny wszystkich zbiorów termów i formuł pierwszego rzędu do rodziny wszystkich zbiorów termów z $\mathbb{T}$. Definicja $\lceil - \rceil$ jest przez indukcję ze względu na strukturę argumentu:

- $\lceil x \rceil \equiv x$, dla zmiennej $x$,
- $\lceil f(t_1, \ldots, t_n) \rceil \equiv f \lceil t_1 \rceil \ldots \lceil t_n \rceil$, dla $n$-arnego symbolu funkcyjnego $f$,
- $\lceil r(t_1, \ldots, t_n) \rceil \equiv r \lceil t_1 \rceil \ldots \lceil t_n \rceil$, dla $n$-arnego symbolu relacyjnego $r$,
- $\lceil \bot \rceil \equiv \bot$,
- $\lceil \varphi \vee \psi \rceil \equiv \lceil \varphi \rceil \vee \lceil \psi \rceil$,
- $\lceil \varphi \wedge \psi \rceil \equiv \lceil \varphi \rceil \wedge \lceil \psi \rceil$,
- $\lceil \varphi \to \psi \rceil \equiv \lceil \varphi \rceil \supset \lceil \psi \rceil$,
- $\lceil \forall x.\varphi \rceil \equiv \Xi \mathsf{A} \lambda x. \lceil \varphi \rceil$,
- $\lceil \exists x.\varphi \rceil \equiv \mathsf{X} \mathsf{A} \lambda x. \lceil \varphi \rceil$.

Rozszerzamy funkcję $\lceil - \rceil$ na zbiory formuł pierwszego rzędu tak: $\lceil \Delta \rceil = \{ \lceil \varphi \rceil \mid \varphi \in \Delta \}$.

Jeśli $\Delta$ jest zbiorem termów i formuł pierwszego rzędu, to zbiór $\Gamma(\Delta)$ zawiera:

- $\mathsf{F}_n \mathsf{A} \ldots \mathsf{A} \mathsf{H} r$ dla $n$-arnego symbolu relacyjnego $r$, gdzie $\mathsf{A}$ występuje $n$ razy,
- $\mathsf{F}_n \mathsf{A} \ldots \mathsf{A} \mathsf{A} f$ dla $n$-arnego symbolu funkcyjnego $f$, gdzie $\mathsf{A}$ występuje $n+1$ razy,
- $\mathsf{A} x$ dla $x \in \mathrm{FV}(\Delta)$,
- $\mathsf{A} y$ dla świeżej zmiennej $y$.

Ostatni punkt jest konieczny, ponieważ w tradycyjnej logice implicite zakładamy, że uniwersum jest niepuste. Term $\mathsf{F}_n$ jest zdefiniowany tak jak w sekcji 2.

Podobne translacje są pokazane dla innych systemów. Poprawność i pełność translacji są sformułowane w poniższym twierdzeniu, gdzie $\models_{\mathrm{std}}$ oznacza relację semantycznej konsekwencji ze względu na standardowe modele logiki wyższego rzędu, a NJp, NKp, NJ, NK, NK$\omega$, $e$NK$\omega$ oznaczają odpowiednie tradycyjne systemy logiki: intuicjonistyczną logikę zdaniową, klasyczną logikę zdaniową, intuicjonistyczną logikę pierwszego rzędu, klasyczną logikę pierwszego rzędu, intensjonalną klasyczną logikę wyższego rzędu, ekstensjonalną klasyczną logikę wyższego rzędu.

**Twierdzenie 2** (Poprawność i pełność translacji)**.**

1. *Warunki $\Delta \vdash_{\mathcal{N}} \varphi$ i $\Gamma(\Delta, \varphi), \lceil \Delta \rceil \vdash_{\mathcal{I}} \lceil \varphi \rceil$ są równoważne, gdzie*
   - $\mathcal{N} = \mathrm{NJp}$ *i* $\mathcal{I} = \mathcal{I}\mathrm{Jp}$*, lub*
   - $\mathcal{N} = \mathrm{NKp}$ *i* $\mathcal{I} = \mathcal{I}\mathrm{Kp}$*, lub*
   - $\mathcal{N} = \mathrm{NJ}$ *i* $\mathcal{I} = \mathcal{I}\mathrm{J}$*, lub*
   - $\mathcal{N} = \mathrm{NK}$ *i* $\mathcal{I} = \mathcal{I}\mathrm{K}$*.*

   *Innymi słowami, dla systemów illatywnych $\mathcal{I}$Jp, $\mathcal{I}$Kp, $\mathcal{I}$J oraz $\mathcal{I}$K translacje z odpowiednich tradycyjnych systemów logiki są zarówno poprawne jak i pełne.*

2. *Jeśli* $\Delta \vdash_{\mathcal{N}} \varphi$ *to* $\Gamma(\Delta, \varphi), \lceil\Delta\rceil \vdash_{\mathcal{I}} \lceil\varphi\rceil$*, gdzie* $\mathcal{N} = \mathrm{NK}\omega$ *i* $\mathcal{I} = \mathcal{I}\mathrm{K}\omega$*, lub* $\mathcal{N} = e\mathrm{NK}\omega$ *i* $\mathcal{I} = e\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$*. Innymi słowami, dla illatywnych systemów wyższego rzędu, translacje z odpowiednich tradycyjnych systemów logiki są poprawne.*
3. *Jeśli* $\Gamma(\Delta, \varphi), \lceil\Delta\rceil \vdash_{e\mathcal{I}\mathrm{K}\omega} \lceil\varphi\rceil$ *to* $\Delta \models_{\mathrm{std}} \varphi$*. Innymi słowami, jeśli translacja osądu jest wyprowadzalna w* $e\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$*, to ten osąd jest prawdziwy w standardowej semantyce.*

Powyższe twierdzenie łączy i przeformułowuje twierdzenia 4.3.3, 4.3.5, 5.3.4, 5.3.6, 5.3.7, 6.3.6 i 6.3.7 z pracy. Dowody tych twierdzeń używają konstrukcji modeli naszkicowanych w kolejnej sekcji. Nie uzyskaliśmy pełności translacji dla systemów wyższego rzędu, bo nasza konstrukcja modelu w tym przypadku zakłada, że model tradycyjnej logiki wyższego rzędu którym jest ona parametryzowana jest modelem standardowym, a tradycyjna logika wyższego rzędu nie jest pełna ze względu na standardową semantykę. Jednakże nasza konstrukcja modelu wystarcza do tego, aby wykazać, że jeśli translacja osądu jest wyprowadzalna w $e\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$, to ten osąd jest prawdziwy w standardowej semantyce.

## 3.4 Konstrukcje modeli

Głównym wynikiem pracy są dowody niesprzeczności dla wprowadzonych systemów illatywnych, w szczególności dla najsilniejszego systemu $\mathcal{I}^+$. Dowody są przeprowadzone poprzez konstrukcję modeli dla każdego z systemów. W rzeczywistości, ponieważ $\mathcal{I}^+$ jest rozszerzeniem pozostałych systemów, aby wykazać niesprzeczność wszystkich systemów wystarczyłoby skonstruować model dla $\mathcal{I}^+$. Jednakże, konstrukcje modeli są parametryzowane przez modele dla odpowiednich tradycyjnych systemów logiki i używane później w dowodach pełności translacji. Z tego względu potrzebujemy oddzielnych konstrukcji dla każdego z systemów.

Wszystkie konstrukcje bazują na tej samej ogólnej idei definiowania modelu poprzez konstrukcję stałopunktową. Szczegóły konstrukcji komplikują się znacznie wraz ze wzrostem siły wyrazu systemów. Najistotniejszy wzrost w poziomie skomplikowania konstrukcji modelu następuje z przejściem od systemów pierwszego rzędu do systemów wyższego rzędu. Tutaj krótko naszkicujemy główne pomysły konstrukcji dla systemu $\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$ i wskażemy gdzie kryje się istotna trudność.

Konstrukcja modelu dla $\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$ jest parametryzowana standardowym modelem

$$\mathcal{N} = \langle\{\mathcal{D}_\tau \mid \tau \in \mathscr{T}\}, I\rangle$$

dla logiki wyższego rzędu. Tu $\mathscr{T}$ jest zbiorem typów tradycyjnej logiki wyższego rzędu $\mathrm{NK}\omega$, zadanym przez gramatykę

$$\mathscr{T} \quad ::= \quad o \mid \iota \mid \mathscr{T} \to \mathscr{T}$$

gdzie $o$ jest typem zdań, a $\iota$ typem obiektów indywiduowych. Zbiór $\mathcal{D}_\tau$ jest dziedziną obiektów typu $\tau \in \mathscr{T}$. Jeśli $\tau = \tau_1 \to \tau_2$ to $\mathcal{D}_\tau$ składa się ze wszystkich funkcji z $\mathcal{D}_{\tau_1}$ do $\mathcal{D}_{\tau_2}$. Funkcja $I$ daje interpretację stałych. Zakładamy, że wszystkie stałe systemu $\mathrm{NK}\omega$ występują w składni $\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$. Zakładamy też, że każdy element $d \in \mathcal{D}_\tau$ dla $\tau \in \mathscr{T}$ występuje jako oddzielna stała w zbiorze termów $\mathbb{T}$. Jeśli $I(c) = d \in \mathcal{D}_\tau$ to bez straty ogólności zakładamy, że $c \equiv d$. Jeśli $f \in \mathcal{D}_{\tau\to\rho}$ i $a \in \mathcal{D}_\tau$, to aby uniknąć konfuzji z termem $fa$ piszemy $f^{\mathcal{N}}(a)$ zamiast $f(a)$, gdzie $f(a)$ jest wartością funkcji $f$ na argumencie $a$. Bez straty ogólności identyfikujemy term $\bot$ ($\top$) z elementem $\bot$ ($\top$) dziedziny $\mathcal{D}_o$.

Dla $\tau \in \mathscr{T}$ i liczby porządkowej $\alpha$ definiujemy indukcyjnie relację reprezentacji $\succ_\tau^\alpha \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$, relację kontrakcji $\to^\alpha \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ i relację $\succ_{\mathscr{T}}^\alpha \in \mathbb{T} \times \mathscr{T}$. Pokażemy dla przykłady kilka (nieco zmienionych) reguł w tej definicji. Poniżej $X \rightsquigarrow_\tau^\alpha Y$ jest skrótem $X \stackrel{*}{\to}^\alpha \cdot \succ_\tau^\alpha Y$, oraz definiujemy $\succ_\tau^{<\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha} \succ_\tau^\beta$ i $\rightsquigarrow_\tau^{<\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha} \rightsquigarrow_\tau^\beta$.

($\beta$) $(\lambda x.X)Y \to^\alpha X[x/Y]$,

($\gamma$) $fX \to^\alpha b$ jeśli $f \in \mathcal{D}_{\tau_1\to\tau_2}$, $a \in \mathcal{D}_{\tau_1}$, $b \in \mathcal{D}_{\tau_2}$, $f^{\mathcal{N}}(a) = b$ i $X \succ_{\tau_1}^{<\alpha} a$,

($\mathcal{F}_\tau$) $X \succ_\tau^\alpha d$ jeśli $\tau = \tau_1 \to \tau_2$, $d \in \mathcal{D}_{\tau_1\to\tau_2}$ i dla każdego $a \in \mathcal{D}_{\tau_1}$ mamy $Xa \rightsquigarrow_{\tau_2}^{<\alpha} d^{\mathcal{N}}(a)$,

($\mathsf{V}_\top$) $X \vee Y \succ_o^\alpha \top$ jeśli $X \succ_o^{<\alpha} \top$ lub $Y \succ_o^{<\alpha} \top$,

($\mathsf{V}_\bot$) $X \vee Y \succ_o^\alpha \bot$ jeśli $X \succ_o^{<\alpha} \bot$ i $Y \succ_o^{<\alpha} \bot$,

($\Xi_\top$) $\Xi XY \succ_o^\alpha \top$ jeśli $X \succ_{\mathscr{T}}^{<\alpha} \tau$ i dla każdego $d \in \mathcal{D}_\tau$ mamy $Yd \rightsquigarrow_o^{<\alpha} \top$,

($\Xi_\bot$) $\Xi XY \succ_o^\alpha \bot$ jeśli $X \succ_{\mathscr{T}}^{<\alpha} \tau$ oraz istnieje taki $d \in \mathcal{D}_\tau$, że $Yd \rightsquigarrow_o^{<\alpha} \bot$,

($\mathsf{L}_\top$) $\mathsf{L}X \succ_o^\alpha \top$ jeśli $X \succ_{\mathscr{T}}^{<\alpha} \tau$ dla pewnego $\tau \in \mathscr{T}$,

($\mathsf{H}_{\mathscr{T}}$) $\mathsf{H} \succ_{\mathscr{T}}^\alpha o$,

($\mathsf{A}_{\mathscr{T}}$) $\mathsf{A} \succ_{\mathscr{T}}^\alpha \iota$,

($\mathsf{F}_{\mathscr{T}}$) $\mathsf{F}XY \succ_{\mathscr{T}}^\alpha \tau_1 \to \tau_2$ jeśli $X \succ_{\mathscr{T}}^{<\alpha} \tau_1$ i $Y \succ_{\mathscr{T}}^{<\alpha} \tau_2$.

Definicję należy rozumieć w ten sposób, że $\to^\alpha$ jest kompatybilnym domknięciem reguł ($\beta$), ($\eta$) and ($\gamma$), ale relacje $\succ_\tau^\alpha$ dla $\tau \in \mathscr{T}$ i $\succ_{\mathscr{T}}^\alpha$ definiowane są bezpośrednio przez odpowiednie reguły, tzn., bez brania kompatybilnego domknięcia – nie są to relacje kontrakcji.

Dla $\alpha \le \kappa$ mamy $\to^\alpha \subseteq \to^\kappa$, $\succ_\tau^\alpha \subseteq \succ_\tau^\kappa$ dla $\tau \in \mathscr{T}$, oraz $\succ_{\mathscr{T}}^\alpha \subseteq \succ_{\mathscr{T}}^\kappa$. Zatem istnieje taka liczba porządkowa $\zeta$, że $\to^\zeta = \to^{<\zeta}$, $\succ_\tau^\zeta = \succ_\tau^{<\zeta}$ dla $\tau \in \mathscr{T}$, oraz $\succ_{\mathscr{T}}^\zeta = \succ_{\mathscr{T}}^{<\zeta}$. Używamy notacji $\to$, $\succ_\tau$ ($\tau \in \mathscr{T}$), $\succ_{\mathscr{T}}$ odpowiednio na $\to^\zeta$, $\succ_\tau^\zeta$ ($\tau \in \mathscr{T}$), $\succ_{\mathscr{T}}^\zeta$.

Model $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ dla systemu $\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$ definiujemy jako $\mathcal{M}_{\mathcal{N}} = \langle \mathcal{C}, I, \mathcal{T}, \mathcal{F} \rangle$ gdzie:

- $\mathcal{C}$ jest illatywną algebrą kombinatoryczną wyższego rzędu skonstruowaną z klas abstrakcji termów ze względu na $\beta\gamma$-równość, gdzie kładziemy $\mathsf{k} = [\mathsf{K}]$, $\mathsf{s} = [\mathsf{S}]$, $\Xi = [\Xi]$, itd., gdzie przez $[X]$ oznaczamy klasę abstrakcji termu $X$,
- interpretację stałych $I$ definiujemy przez $I(c) = [c]$ dla $c \in \Sigma$,
- $\mathcal{T} = \{[X] \mid X \rightsquigarrow_o \top\}$,
- $\mathcal{F} = \{[X] \mid X \rightsquigarrow_o \bot\}$.

Intuicyjnie, $X \succ_\tau d$ dla $\tau \in \mathscr{T}$ oznacza „$X$ jest reprezentowany przez $d$ w typie $\tau$", tzn., „$X$ zachowuje się dokładnie tak jak $d$ w każdym kontekście w którym wartość typu $\tau$ jest oczekiwana". Domknięcie na dowolne konteksty w których wartość typu $\tau$ jest „oczekiwana" jest w istocie zaimplementowane przez $\gamma$-redukcję. Relację $X \succ_{\mathscr{T}} \tau$ rozumiemy jako „$X$ interpretowany jako typ jest reprezentowany przez $\tau$".

Reguły dla $\succ_o$ odpowiadają warunkom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{F}$ w definicji $\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$-modelu. Są one takie, jak by się można było spodziewać, być może poza regułami ($\Xi_\top$) i ($\Xi_\bot$). Zamiast reguły ($\Xi_\top$) możnaby oczekiwać

($\Xi'_\top$) $\Xi XY \succ_o^\alpha \top$ jeśli $\mathsf{L}X \succ_o^{<\alpha} \top$ i dla każdego $Z$, jeśli $XZ \leadsto_o^{<\alpha} \top$ to $YZ \leadsto_o^{<\alpha} \top$.

Jednakże w tej regule występuje negatywne odwołanie do $\leadsto_o^{<\alpha}$ w $XZ \leadsto_o^{<\alpha} \top$, więc może się okazać, że nie jest prawdą iż $\succ_o^\alpha \subseteq \succ_o^\kappa$ dla $\alpha \le \kappa$. W takim wypadku możemy nie uzyskać punktu stałego. Sposobem w jaki rozwiązujemy ten istotny problem jest ograniczenie kwantyfikacji tylko do stałych z odpowiedniej dziedziny $\mathcal{D}_\tau$. Pokazujemy potem, że jeśli $X \succ_{\mathscr{T}} \tau$ to kwantyfikowanie tylko po elementach $\mathcal{D}_\tau$ jest równoważne kwantyfikowaniu po wszystkich takich $Z$, że $XZ \leadsto_o \top$. Wykazanie tej własności przedstawia poważną trudność, przez co dowód tego, że $\mathcal{M}_\mathcal{N}$ rzeczywiście jest $\mathcal{I}\mathrm{K}\omega$-modelem znacząco się komplikuje.

Z konstrukcji modeli dla systemów illatywnych wynika następujące twierdzenie, które jest połączeniem wniosków 4.2.9, 4.2.14, 5.2.10, 5.2.15, 6.2.22 i 7.2.33 z pracy.

**Twierdzenie 3** (Główny wynik)**.** *Wszystkie systemy* $\mathcal{I}$Jp, $\mathcal{I}$Kp, $\mathcal{I}$J, $\mathcal{I}$K, $\mathcal{I}$K$\omega$, *e*$\mathcal{I}$K$\omega$ *i* $\mathcal{I}^+$ *są niesprzeczne, tzn.,* $\bot$ *nie jest dowodliwe w pustym kontekście.*

# Literatura


[1] Henk Barendregt, Martin W. Bunder, and Wil Dekkers. Systems of illative combinatory logic complete for first-order propositional and predicate calculus. *Journal of Symbolic Logic*, 58(3):769–788, 1993.

[2] Alonzo Church. A set of postulates for the foundation of logic I. *Annals of Mathematics, ser. 2*, 33(2):346–366, 1932.

[3] Alonzo Church. A set of postulates for the foundation of logic II. *Annals of Mathematics, ser. 2*, 34(4):839–864, 1933.

[4] Haskell B. Curry. Grundlagen der kombinatorischen Logik. *American Journal of Mathematics*, 52:509–536, 789–834, 1930.

[5] Haskell B. Curry, Robert Feys, and William Craig. *Combinatory Logic*, volume 1. North-Holland, 1958.

[6] Haskell B. Curry, J. Roger Hindley, and Jonathan P. Seldin. *Combinatory Logic*, volume 2. North-Holland, 1972.

[7] Łukasz Czajka. A semantic approach to illative combinatory logic. In *Computer Science Logic, 25th International Workshop / 20th Annual Conference of the EACSL, CSL 2011, September 12-15, 2011, Bergen, Norway, Proceedings*, volume 12 of *LIPIcs*, pages 174–188. Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, 2011.

[8] Łukasz Czajka. Confluence of an extension of Combinatory Logic by Boolean constants. 2013. Submitted.

[9] Łukasz Czajka. Higher-order illative combinatory logic. *Journal of Symbolic Logic*, 73(3):837–872, 2013. See also `http://arxiv.org/abs/1202.3672` for a revised and corrected version.

[10] Łukasz Czajka. Partiality and recursion in higher-order logic. In Frank Pfenning, editor, *FoSSaCS*, volume 7794 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 177–192. Springer, 2013.

[11] Łukasz Czajka. Partiality and recursion in higher-order logic. Technical report, University of Warsaw, 2013. Available at `http://arxiv.org/abs/1210.2039`.

[12] Łukasz Czajka. A coinductive confluence proof for infinitary lambda-calculus. In Gilles Dowek, editor, *Rewriting and Typed Lambda Calculi - Joint International Conference, RTA-TLCA 2014, Held as Part of the Vienna Summer of Logic, VSL 2014, Vienna, Austria, July 14-17, 2014. Proceedings*, volume 8560 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 164–178. Springer, 2014.

[13] Wil Dekkers, Martin W. Bunder, and Henk Barendregt. Completeness of the propositions-as-types interpretation of intuitionistic logic into illative combinatory logic. *Journal of Symbolic Logic*, 63(3):869–890, 1998.

[14] Wil Dekkers, Martin W. Bunder, and Henk Barendregt. Completeness of two systems of illative combinatory logic for first-order propositional and predicate calculus. *Archive for Mathematical Logic*, 37(5-6):327–341, 1998.

[15] Moses Schönfinkel. Über die Bausteine der mathematischen Logik. *Mathematische Annalen*, 92:305–316, 1924.