Interpolacja splajnowa

W każdym zadaniu zakładamy, że dany jest podział odcinka $[a, b]$: $\Pi : a = x_0 < \ldots < x_n = b$.

Przestrzeń splajnów liniowych:

$$S_1^0(\Pi) = \{s \in C([a, b] : s_{|[x_k, x_{k+1}]} \in P_1 \quad k = 0, \ldots, n-1\}$$

dla P_1 przestrzeni wielomianów liniowych.

Przestrzeń splajnów kubicznych:

$$S_3^2(\Pi) = \{s \in C^2([a, b] : s_{|[x_k, x_{k+1}]} \in P_3 \quad k = 0, \ldots, n-1\}$$

dla P_3 przestrzeni wielomianów kubicznych. Splany kubiczne naturalne to splay kubiczne takie, że ich drugie pochodne w końcu odcinka się zerują.

Zadanie 1 Wyznacz wzory na współczynniki w bazie Newtona związanej z lewym końcem każdego pod-odcinka na obcięcie splajnu interpolacyjnego liniowego tzn. dla $r = 1$ dla danej funkcji f.

Rozwiązanie: Wystarczy zauważyć $s_k := s_{|[x_k, x_{k+1}]}$ to wielomian interpolacyjny Lagrange'a na 2 węzłach x_k, x_{k+1} zatem

$$s_k = f(x_k) + f[x_k, x_{k+1}](x - x_k) \qquad k = 0, \ldots, n-1$$

czyli koszt wyznaczenia takiej reprezentacji splajnu interpolacyjnego liniowego to koszt policzenia $f[x_k, x_{k+1}]$ n różnic dzielonych: $2n$ odejmowań i n dzieleń (sporo droższe).

Zadanie 2 Wyznacz wzory na bazę splajnów liniowych taką, że każda funkcja z bazy jest zero w jednym węźle a zero w pozostałych. Wyznacz nośnik każdej takiej funkcji. Uzasadnij, że to baza.

Rozwiązanie: Nietrudno zauważyć, że taka funkcja ϕ_k która jest splajnem liniowym i ma wartość jeden w k-tym węźle x_k a zero pozostałych może być niezerowa tylko w pod-odcinkach z końcem x_k.

Czyli nośnik jej to $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ dla $k = 1, \ldots, n-1$ lub $[x_0, x_1]$ dla ϕ_0 i ostatni pod-odcinek dla ϕ_n. Wzór to:

$$\phi_k(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} & x \in (x_{k-1}, x_k), \\ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} & x \in (x_k, x_{k+1}), \\ 0 & x \notin (x_{k-1}, x_{k+1}), \end{cases} \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

and analogously ϕ_0, ϕ_n.

Pokażmy, że to baza. Niezależność liniowa wynika z tego że

$$1 = \phi_k(x_k) \neq \sum_{j \neq k} c_j \phi_j(x_k) = 0$$

dla dowolnych c_j. Rozpinanie: zauważmy oczywisty fakt: 2 splajny liniowe równe w węzłach są sobie równe. Biorąc $s_1 = \sum_k s(x_k)\phi_k$ dla s dowolnego splajnu liniowego mamy

$$s(x_k) = s_1(x_k) \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Z powyższej obserwacji mamy że $s = s_1$ czyli rozpinanie.

Zadanie 3 Oszacuj błąd w normie maksimum interpolacji Lagrange'a na dwóch węzłach równoodległych na odcinku $[a, b]$ dla $f \in C^r([a, b])$ $r = 1, 2$.

Rozwiązanie: To właściwie zadanie na błąd interpolacji. Dla $f \in C^2$ mamy wprost ze wzoru na błąd interpolacji:

$$\begin{aligned} \|f - p_1\|_{\infty,[a,b]} &\leq \frac{\|f''\|_{\infty,[a,b]}}{2} \|(x-a)(x-b)\|_{\infty,[a,b]} = \frac{\|f''\|_{\infty,[a,b]}}{2} \frac{(b-a)^2}{4} \\ &= \|f''\|_{\infty,[a,b]} \frac{(b-a)^2}{8}. \end{aligned}$$

Dla $f = (x - a)(x - b)$ w tym oszacowaniu mamy równość.

Dla $r = 1$ nie możemy użyć wzoru powyższego ale możemy wprost oszacować dla $t \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} |f(t) - p_1(t)| &\leq |f(t) - f[a] - f[a,b](t-a)| \\ &\leq |f(t) - f(a)| + \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) \right| \\ &= (|f'(\xi_1)| + |f'(\xi_2)|)|t - a| \\ &\leq 2\|f'\|_{\infty,[a,b]}|t - a| \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy dwa razy z twierdzenia o wartości średniej. Proszę zauważyć, że możemy pokazać

$$|f(t) - p_1(t)| \leq 2\|f'\|_{\infty,[a,b]}|t - b|$$

zatem

$$|f(t) - p_1(t)| \leq 2\|f'\|_{\infty,[a,b]} \min(|t - b|, |t - a|) \leq \|f'\|_{\infty,[a,b]}(b - a).$$

Można pokazać nawet lepsze oszacowanie

$$|f(t) - p_1(t)| \leq 0.5\|f'\|_{\infty,[a,b]}(b - a)$$

ale to trochę trudniejsze i pozostawiamy to jako dodatkowe zadanie.

Zadanie 4 Oszacuj błąd interpolacji splajnami liniowymi w normie maksimum na $[a, b]$ dla $f \in C^r([a, b])$ $r = 1, 2$.

Rozwiązanie: Wprost z poprzedniego zadania. Norma błędu interpolacji splajnem liniowym w normie max szacuje się przez max z norm na podpodcinkach, które szacujemy z poprzedniego zadania.

Zadanie 5 Pokaż, że jeśli $s_n f$ splajn liniowy interpolujący f to

$$\|f - s_n f\|_\infty \leq 2\|f - s\|_\infty \qquad \forall s \in S_1^0(\Pi)$$

Wskazówka: pokaż że $\|s_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ i że $s_n f$ to operacja liniowa względem f. Dalej oczywiście splajn interpolacyjny liniowy $s_n(s) = s$ dla dowolnego splajnu liniowego s i korystając z nierówności trójkąta i powyższego

$$\begin{aligned}
\|f - s_n f\|_\infty &\leq \|f - s\|_\infty + \|s_n(s) - s_n(f)\|_\infty \\
&\leq \|f - s\|_\infty + \|s_n(f - s)\|_\infty \\
&\leq \|f - s\|_\infty + \|f - s\|_\infty \\
&= 2\|f - s\|_\infty.
\end{aligned}$$

Zadanie 6 Założmy że $n \geq 3$ - czy istnieje splajn kubiczny taki że jego nośnik jest zawarty w $[x_k, x_{+1}]$ dla jakiegoś $0 < k < n - 1$ (tzn w wewnętrznym podpodcinku).

Rozwiązanie: Załóżmy, że istnieje... Z ciągłości splajnu i jego 2 pochodnych mamy że na tym $[x_k, x_{k+1}]$ zachodzi:

$$s_k^{(j)}(x_k) = s_k^{(j)}(x_{k+1}) = 0$$

dla $s_k = s_{|[x_k, x_{k+1}]}$ i $s_k \in P_3$ (kubiczny wielomian) - stąd mamy 6 zerowych warunków Hermitowskich (2 węzły 3 krotne) dla wielomianu kubicznego - to oczywiście pokazuje że s_k zero.

Zadanie 7 Znajdź splajn kubiczny B na podziale równomiernym $[-3, 3]$ z $h = 1$ taki, że jest tożsamościowo zero poza $(-2, 2)$ i przyjmuje wartości

$$B(-1) = B(1) = 1, \qquad B(0) = 4$$

Szkic rozwiązania: Interpolacja Hermite'a wpierw na $[-2, -1]$ i analogicznie na $[1, 2]$ a potem na $[-1, 0]$ i $[0, 1]$. A dokładniej z ciągłości C^2 w -2 mamy dla $s_{-2} = s_{|[-2,-2]}$ $s_{-2}(-2) = s'_{-2}(-2) = s''_{-2}(-2) = 0$ dodatkowo $s_{-2}(-1) = 1$ i s wielomian kubiczny, czyli mamy 4 warunki hermitowskie dla wielomianu kubicznego wyznaczające go jednoznacznie. Najprościej w bazie Newtona tabelką różnic dzielonych:

$$s_{-2} = (x + 2)^3$$

i kolejno dla $s_{-1} = s_{|[-1,0]}$ $s_{-1}(-1) = s_{-2}(-2) = 1$, $s_{-1}(-1) = s'_{-2}(-2) = 3$, $s_{-1}(-1) = s''_{-2}(-2) = 6$ dodatkowo $s_{-2}(0) = 4$ i s znów wielomian kubiczny - i analogicznie jednoznacznie tymi warunkami wyznaczony - można policzyć znów tabelką rd. Dla $t > 0$ możemy zdefiniować z symetrii $B(t) = B(-t)$... Na końcu tylko trzeba sprawdzić czy $s'_{-1}(0) = 0$. Inaczej by taki B nie istniał (dlaczego?).

Zadanie 8 Wyznacz na podziale równomiernym funkcję B_k taką , że jej nośnik to $[x_{k-2}, x_{k+2}]$ i przyjmującą w x_k wartość 4 równania na $s(x) = \sum_{k=-1}^{N+1} c_k B_k$ dla S splajnu naturalnego interpolującego daną f w $(x_k)_{k=0}^{N}$. Wykaż, że c_k wyznaczone jednoznacznie.

Zadanie 9 s splajn kubiczny taki, że na odcinku $[x_{k-1}, x_k]$ i $[x_{k+1}, x_{k+2}]$ jest równy zero. Pokaż, że na $[x_k, x_{k+1}]$ też jest tożsamościowo zero. Czy tak własność jest prawdziwa dla dowolnych splajnów w $S_{2r-1}^{2r-2}(\Pi)$?

Zadanie 10 Czy istnieje splajn kubiczny na danym podziale Π:

- naturalny ($s''(a) = s''(b) = 0$)
- typu not-a-knot (dodatkowe warunki: trzecia pochodna ciągła na $[x_0, x_2]$ i $[x_{n-1}, x_n]$)
- okresowy ($s^{(k}(a) = s^{(k)}(b)$ $k = 0, 1, 2$)
- hermitowski (z zerowymi $s'(a) = s'(b) = 0$ i niezerowymi warunkami brzegowymi: $s'(a) = \alpha, s'(b) = \beta$)
- bez warunków brzegowych

o nośniku $[x_0, x_1]$ (czyli równy zero na $[x_1, x_b]$).

Zadanie 11 Czy istnieje splajn kubiczny naturalny na podziale z węzłami $-1, 0, 1, 2, 3, 4$ taki, że $s_{[0,2]} = x^2 - x$ i $s(-1) = s(3) = s(4) = 0$?

Zadanie 12 Czy istnieje splajn kubiczny na podziale z węzłami $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ typu not-a-knot taki, że $s_{[0,1]} = x^2 - x = s_{|[3,4]}$ i $s(-1) = s(2) = 0$?

Zadanie 13 Podaj warunek na splajn kubiczny interpolacyjny w reprezentacji Hermitowskiej taki,że $s_{|[x_0,x_1]}$ jest wielomianem stopnie ≤ 2 tzn podaj warunki na a_k, b_k $k = 0, 1$ takich że $s(x_k) = a_k$ i $s'(x_k) = b_k$ dla $k = 0, 1$ (a_k, b_k to współczynniki reprezentacji Hermitowskiej s).

Zadanie 14 Wykaż, wzór na splajny w $S_{2r-1}^{2r-2}(\Pi)$: tzn. $s \in S_{2r-1}^{2r-2}(\Pi)$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$s(x) = p(x) + \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_k)_+^{2r-1}$$

gdzie

$$(x)_+ = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases},$$

a_k współczynniki a $p \in P_{2r-1}$. Jeśli s splajn naturalny to dodatkowo $p \in P_{r-1}$ i $\sum_{k=0}^{n} a_k x_k^j = 0$ dla $j = 0, \ldots, r-1$

Zadanie 15 Wyznacz wymiar przestrzeni $S_{2r-1}^{2r-2}(\Pi)$ oraz jej podprzestrzeni splajnów naturalnych.