Interpolacja wielomianowa. Wielomiany Czebyszewa

W tym rozdziale zajmiemy się interpolacją wielomianową Lagrange'a i Hermite'a oraz wielomianami Czebyszewa (zadania ze słowem Czebyszew lub zad z nr od 13 w górę na razie dla chętnych..)

Zadanie 1 Napisz w pseudokodzie odpowiednią wersję algorytmu Hornera obliczania wartości wielomianu zadanego w bazie Newtona dla znanych węzłów dla danego punktu x.

Rozwiązanie: Algorytm Hornera bazuje na tym że

$$\sum_k a_k x^k = a_0 + x(\sum_{k=1}^{n} a_k x^{k-1}) = a_0 + x(\ldots a_{n-2} + x(a_{n-1} + x(a_n)\ldots).$$

Napisanie wersji w pseudokodzie to już rzecz prosta... a w bazie Newtona analogicznie

$$\sum_k a_k \Pi_{j=0}^{k-1}(x - x_j) = a_0 + (x - x_0)(\sum_{k=1}^{n} a_k \Pi_{j=1}^{k-1}(x - x_j))$$
$$= a_0 + (x - x_0)(a_1 + (x - x_2)(..(a_{n-2} + (x - x_{n-2})(a_{n-1} + (x - x_{n-1})(a_n)..).$$

Zatem startujemy $w = a_n$ a potem $w = a_k + w * (x - x_k)$ dla $k = n-1, \ldots, 0$.

Zadanie 2 Pokaż ze różnica dzielona nie zalezy od kolejnosci wezłów wprost ze wzoru $L_n f = L_{n-1} f + f[x_0, ..., x_n]\Pi_{j<n}(x - x_j)$ - tu $L_k f$ wielomian interpolujący f w węzłach $x_0, \ldots, x_k$ $0 \leq k \leq n$.

Wskazówka: Zauważmy że w współczynniki w bazie potęgowej wielomianu interpolacyjnego $L_n f$ nie zależą od kolejności węzłów stąd $f[x_0, \ldots, x_n] = a_n$ (dlaczego?) dla $L_n f = a_n x^n \sum_{k<n} a_k x^k$ a stąd wynika teza... (jak?)

Zadanie 3 Pokaż że układ Lagrange'a

$$l_k(x) = \frac{\Pi_{j \neq k}(x - x_j)}{\Pi_{j \neq k}(x_k - x_j)} \qquad k = 0, \ldots, n$$

rzeczywiście jest bazą (Lagrange'a) dla $n + 1$ różnych węzłów.

Rozwiązanie: Wystarczy pokazać liniową niezależność bo znamy wymiar przestrzeni wielomianów stopnia nie większego od n - tyle ile wielomianów w bazie (na razie układzie) Lagrange'a . Weźmy kombinacje wielomianów

$$\sum_k a_k l_k = 0$$

czy a_j muszą być zero? Tak wystarczy wziąć

$$0 = \sum_k a_k l_k(x_j) = a_j$$

- a to prawda dla dowolnego $j = 0, \ldots, n$.

Zadanie 4 Zakładając że znamy mianowniki w funkcjach bazy Lagrange'a zaproponuj algorytm obliczania wartości wielomianu zadanego w bazie Lagrange'a możliwie niskim kosztem.

Rozwiązanie: Wystarczy zauważyć, że

$$m_k l_k(x) = w(x)/(x - x_k) \quad x \neq x_k$$

gdzie $w(x) = \Pi_{j=0}^n (x - x_j)$ a m_k to mianownik w wzorze na l_k wielomianie bazowym Lagrange'a (nie zależy od x). Zatem

$$\sum_k c_k l_k(x) = w(x)(\sum_k c_k/m_k)$$

co można policzyć kosztem liniowym... Dla $x = x_k$ mamy $w(x) = w(x_k) = c_k$.

Zadanie 5 Jak znając wielomian interpolacyjny p_{n-1} dla f w n węzłach możliwie tanio znaleźć wielomian interpolacyjny na tych węzłach plus jeden dodatkowy punkt x_n? Skonstruuj rekurencyjny algorytm wyznaczania wielomianu interpolacyjnego w bazie Newtona na bazie tego zadania. Oszacuj koszt algorytmu zakładając że koszt obliczenia wartości wielomianu stopnia $\leq k$ w bazie Newtona wynosi $3k$.

Rozwiązanie: Jeśli p_k wielomian interpolujący f w $x_0, \ldots, x_k$ to szukajmy p_{k+1} jako

$$p_{k+1} = p_k + c_{k+1}(x - x_0)\ldots(x - x_k)$$

oczywiście

$$p_k(x_j) = p_{k+1}(x_j) = f(x_j) \qquad j < k + 1$$

zatem wystarczy wyznaczyć współczynnik c_{k+1} - podstawiając x_{k+1} dostajemy:

$$f(x_{k+1}) = p_{k+1}(x_{k+1}) = p_k(x_{k+1}) + c_{k+1}(x_{k+1} - x_0)\ldots(x_{k+1} - x_k)$$

stąd mamy wzór na c_{k+1} o ile potrafimy policzyć wartość $p_k(x_{k+1})$ - co można policzyć kosztem liniowym (jak?).

Ogólnie znając współczynniki p_k w bazie Newtona dla $(x_0, \ldots, x_{k-1})$ możemy policzyć współczynnik w bazie Newtona dla $(x_0, \ldots, x_k)$ dla p_{k+1}. Oczywiście $p_0 = f(x_0)$.

Taki algorytm nazywa się metodą Newtona i jest alternatywą dla algorytmu różnic dzielonych.

Zadanie 6 Policz koszt algorytmu Hornera.

Zadanie 7 Zmodyfikuj algorytm Hornera dla wielomianu zadanego współczynnikami w bazie Newtona dla danych węzłów. Policz koszt.

Zadanie 8 Oblicz współczynniki wielomianu interpolującego w bazie Newtona algorytmem różnic dzielonych dla konkretnych węzłów i wartości np dla tabelki

k	x_k	$f(x_k)$
0	-1	1
1	0	0
2	1	3
3	2	10

znajdź współczynniki wielomianu interpolacyjnego: w bazie jednomianów rozwiązując wprost układ równań liniowych: $\sum_{k=0}^{3} a_k x_l^k = y_l$ dla $l = 0, \ldots, 3$, w bazie Newtona związanej z $\{x_k\}_{k=0}^{2}$ przy pomocy algorytmu różnic dzielonych i metodą Newtona. Sprawdź wynik.

Wskazówka: Trzeba rozpisać tabelkę różnic dzielonych - po kolei kolumny - jak na wykładzie/skrypcie.

Zadanie 9 Dla danej tabelki

x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$f''(x_k)$
0	-1		
1	-2	-2	12
3	80		

znajdź współczynniki wielomianu interpolacyjnego Hermite'a: w bazie Newtona związanej z $\{x_0, x_1, x_1, x_1\}$ przy pomocy algorytmu różnic dzielonych. Sprawdź wynik.

Zadanie 10 Udowodnij ze wzoru na różnice dzielone (wykład) wzór rekurencyjny (względem ilości węzłów) różnice dzielone.

Zadanie 11 Pokaż, że

$$\|\Pi_{k=0}^{n}(x - x_k)\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{n! h^{n+1}}{4},$$

dla $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ i $h = \max_k |x_k - x_{k-1}|$. W szczególności daje to oszacowanie błędu interpolacji Lagrange'a dla węzłów równo-odległych (właściwie dowolnych zawierających końce odcinak...) (jak?):

$$\|f - w\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty,[a,b]} h^{n+1}}{4(n+1)},$$

dla $f \in C^{n+1}([a, b])$.

Wskazówka: Dowód jest rekurencyjny, najpierw dla 2 węzłów (końców odcinka) - tu mamy równość, a potem indukcja względem ilości węzłów.

Zadanie 12 Oszacuj błąd $\|w-f\|_{\infty,[-1,4]}$ dla w wielomianu interpolującego $f(x) = \sin(x)$ punktach $-1, 0, 1, 2, 3, 4$, nie licząc tego wielomianu. (Oszacuj! Nie musi być dokładnie policzony....)

Rozwiązanie: Korzystamy ze wzoru:

$$f(t) - w(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(t - x_0) \dots (t - x_n),$$

dla $t \in (a, b)$ i f dostatecznie gładkiej na (a, b), w wielomianu interpolacyjnego interpolującego f w $(x_k)_{k=0}^n$. Tutaj ξ to jakiś (nieznany, wiemy tylko, że istnieje) punkt pomiędzy t a węzłami. Możemy skorzystać też ze wniosku z tego wzoru:

$$\|f - w\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty,[a,b]}}{(n+1)!} \|\Pi_{k=0}^n (t - x_k)\|_{\infty,[a,b]},$$

lub dla dowolnych węzłów w tym równo-odległych (por. poprzednie zadanie):

$$\|f - w\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty,[a,b]} h^{n+1}}{4(n+1)}.$$

Tutaj $h = \max_k |x_k - x_{k-1}|$.

Tu mamy równo-odległe węzły więc podstawiamy do ostatniego wzoru otrzymując ($n = 5$):

$$\|\sin(x) - w\|_{\infty,[-1,4]} \leq \|\sin^{(6)}(x)\|_{\infty,[-1,4]} \frac{1^6}{4 * 6} = \frac{1}{24} \approx 0.417.$$

To tylko oszacowanie!!! Realny błąd może być sporo mniejszy. Proszę sprawdzić w octave'ie - mnie wyszedł błąd poniżej 0.19, oczywiście normę maximum licząc w sposób przybliżony np na 100000 równo-odległych punktach.

Oczywście można szacować wprost z drugiego wzoru: np.

$$\|\Pi_k (t - x_k)\|_\infty \leq \Pi_k \|(t - x_k)\|_\infty$$

u nas da to $5*4*3*3*4*5 = (60)^2 = 3600$ w sumie $\|\sin - w\|_\infty \leq \frac{3600}{6!} = 5$. Sporo gorsze oszacowanie, tak $24*5 = 120$ razy gorsze... ale też prawdziwe...

Zadanie 13 Oszacuj błąd między f i p_n wielomianem interpolującym $f(x) = \sin(x)$ na $[-\pi, 2\pi]$ w $n+1$ węzłach Czebyszewa na tym odcinku w normie maksimum. Czy błąd maleje do zera z n zdążającym do nieskończoności? Czy jeśli weźmiemy $f(x) = \sin(100x)$ to błąd interpolacji w tych węzłach też będzie malał do zera?

Zadanie 14 Jak dobrać x_k aby czynnik

$$\|\Pi_{k=0}^n (x - x_k)\|_{\infty,[a,b]}$$

w oszacowaniu błędu interpolacji był możliwie mały? Dla $[a, b]$

- $[-1, 1]$
- $[0, 2]$
- $[0, 10]$

Rozwiązanie Trzeba skorzystać z fakyu (będzie... można doczytać w skrypcie z wyprzedzeniem)

$$\min_{w=x^m+\ldots} \|w\|_{\infty,[-1,1]} = \|2^{-m+1}T_m\|_{\infty,[-1,1]} = 2^{-m+1}$$

i dodatkowo T_n ma n różnych zer w $[-1, 1]$, które możemy policzyć wiedząc, że:

$$T_{n+1} = \cos((n + 1) * \arccos(x)).$$

$n + 1$ wielomian Czebyszewa. Stąd na $[-1, 1]$ od razu mamy węzły t_k (dlaczego?) to zera T_{n+1}, a na dowolnym $[a, b]$ to $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_k$ - liniowo przeskalowane zera T_{n+1} z $[-1, 1]$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\|\Pi_{k=0}^{n}(x - x_k)\|_{\infty,[a,b]} &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \|\Pi_{k=0}^{n}(t - t_k)\|_{\infty,[-1,1]} \\
&= \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \|2^{-n}T_{n+1}\|_{\infty,[-1,1]} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} 2^{-n}.
\end{aligned}$$

Zadanie 15 Policz wartości pierwiastków $n+1$ wielomianu Czebyszewa oraz jego punkty ekstremalne.

Rozwiązanie Wprost ze wzoru

$$T_{n+1} = \cos((n + 1) * \arccos(x)).$$

liczymy (przyrównujemy do zero lub jeden lub minus jeden odpowiednio) i dostajemy:

$$\begin{aligned}
\cos((n + 1) * \arccos(x_k)) &= 0 \\
(n + 1) * \arccos(x_k)) &= \pi/2 + k * \pi \\
x_k = \cos\left(\frac{0.5 + k}{n + 1}\pi\right) & \quad k = 0, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Wzieliśmy takie k dla których $\frac{0.5+k}{n+1}\pi$ jest w przeciwdziedzinie arccos czyli $[0, \pi]$. Analogicznie wyznaczamy pkty ekstremalne:

$$e_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n + 1}\right) \quad k = 0, \ldots, n + 1$$

dla k parzystych T_{n+1} przyjmuje wartość jeden dla nieparzystych minus jeden, na zmianę.

Zadanie 16 Oszacuj błąd interpolacji na węzłach optymalnych Czebyszewa dla $\log(1+x)$ na $[0,1]$ i $[0,10]$. Czy oszacowanie błędu maleje do zera dla rosnącej ilości węzłów?

Zadanie 17 Znajdź p wielomian stopni ≤ 5 taki że

$$\min_{w \in P_n} \|x^6 - w\|_{\infty,[-1,1]} = \|x^6 - p\|_{\infty,[-1,1]}.$$

Zadanie 18 Niech $\mathcal{A}_{a,b,n} = \{w \in P_n : w(a) = b\}$ dla $a \notin [-1,1]$ i $b \neq 0$. Znajdź $p \in \mathcal{A}_{a,b,n}$ wielomian stopni $\leq n$ taki że

$$\min_{w \in \mathcal{A}_{a,b,n}} \|w\|_{\infty,[-1,1]} = \|p\|_{\infty,[-1,1]}.$$

Zadanie 19 Oszacuj błąd interpolacji Hermite'a na $n+1$ podwójnych węzłach Czebyszewa dla $\sin(x)$ na $[0,3]$ w normie maximum na tym przedziale w zależności od n. Czy błąd dla $n=4$ będzie mniejszy od 0.01?