Numeryczne zadanie własne - metoda potęgowa

Zadanie 1 Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

znajdź wartości i wektory własne. Czy dla wektora startowego $x_0 = (1,2)^T$ metoda potęgowa zbiegnie; jeśli tak to czy zbiegnie do jakiegoś wektora własnego? A co się stanie jeśli weźmiemy $x_0 = (1, -1 - 10^{-6})^T$? Czy metoda zbiegnie do tego samego wektora własnego (pomijając znak)? Czy odwrotna metoda potęgowa

$$x_k = \frac{(A - aI)^{-1}x_{k-1}}{||(A - aI)^{-1}x_{k-1}||} \quad k = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

zbiegnie dla parametru $a = 0.5$ dla $x_0 = (1,2)^T$?

Rozwiązanie: Zadanie własne to zadanie z GALu - my zgadujemy, że wektory własne to $q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$ i $q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T$ z odpowiednimi wartościami własnymi: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$. Metoda potęgowa zbiegnie do wektora dla dominującej w module wartości własnej o normie drugiej jeden o ile ta wartość dodatnia (jak wartość ujemna to parzyste iteracje zbiegną do tego wektora a nieparzyste do minus tego wektora); u nas $\lambda_1 = 3 > 0$; o ile x_0 nie jest prostopadły do wektora własnego dla niej; u nas tak jest więc metoda zbiegnie do q_1 lub $-q_1$ - u nas do q_1 ponieważ współczynnik x_0 w bazie (q_1, q_2) jest dodatni tzn. $q_1^T x_0 > 0$. Dla drugiego x_0 też $q_1^T x_0 = -10^{-6} < 0$ czyli metoda zbiegnie do $-q_1$.

Odwrotna metoda potęgowa dla $a = 5$ to metoda potęgowa zastosowana do $(A - aI)^{-1}$ - jej pary własne to $(q_k, \frac{1}{\lambda_k - a})$ a więc dominująca wartość własna to $\frac{1}{\lambda_1 - a} = -0.5$ ujemna dla q_1 więc parzyste iteracje metoda zbiegną do q_1 a nieparzyste do $-q_1$ (często się mówi że metoda zbiega do $(+/-)q_1$). Z wykładu wiemy że odwrotna metoda potęgowa zbiegnie do wektora własnego dla tej wartości własnej która najbliższa a (w przypadku $|a - \lambda_k| = |a - \lambda_l| < \min_{j \neq k,l} |a - \lambda_j|$ - metoda nie zbiegnie do wektora własnego) u na $a = 5$ bliższe $\lambda_1 = 3$ stąd i no metody potęgowej do $+/-q_1$.

Zadanie 2 Metoda potęgowa dla A takiego że $\lambda_1 = -\lambda_2 > |\lambda_k|$ $k > 2$. jak zmodyfikować by uzyskać λ_1?

Rozwiązanie: Mamy, że $\lambda_1 = -\lambda_2 > |\lambda_3| \geq \ldots$ z odpowiednimi wektorami własnymi q_k (zakładamy, że wektory własne unormowane). Trzeba prześledzić dowód zbieżności metody potęgowej. Widać że jeśli $x_0 = \sum_k \alpha_k q_k$ i założymy że $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$ (dodatnie) to parzyste metoda potęgowa zbiegnie do

$$w_1 = \frac{\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}},$$

a nieparzyste do

$$w_2 = \frac{\alpha_1 q_1 - \alpha_2 q_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}.$$

Oczywiście wtedy $w_1 + w_2$ i $w_1 - w_2$ po unormowaniu to wektory własne $(+/-)q_k$ dla λ_k $k = 1, 2$.

W praktyce nie znamy wartości własnych więc skąd mamy wiedzieć czy parzyste iteracje zbiegają do wektora własnego czy nie, więc w tym przypadku trzeba sprawdzać czy suma granic zbiega do zera.

Zadanie 3 Określ szybkość zbieżności ilorazu Reynoldsa dla macierzy o rzeczywistych wartościach własnych ale niesymetrycznej diagonalizowalnej. Przypominam,że. dla macierzy symetrycznej o jednej dominującej w module wartości własnej λ_1 ilorazy Rayleigha $r_k = x_k^T A x_k$ dla x_k iteracji metody potęgowej zbiegają (przy standardowych założeniach):

$$|r_k - \lambda_1| = O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^2\right)$$

czyli dużo szybciej niż parzyste iteracje (i nieparzyste) metody do odpowiedniego wektora własnego.

Rozwiązanie: Znów powtarzamy wykład: mamy ogólnie że $x_0 = \alpha_k \vec{c}_k$ dla par własnych $(\vec{c}_k, \lambda_k)$. Tu ogólnie wektory własne są tylko niezależne liniowo. Zakładamy $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq ....$ Wtedy po n iteracjach mamy

$$x_n = \frac{\tilde{x}_n}{\|\tilde{x}_n\|_2}$$

z

$$\tilde{x}_n = \lambda_1^n \left(\alpha_1 \vec{c}_1 + \sum_{k>1} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^n \alpha_k \vec{c}_k\right) = \lambda_1^n \left(\alpha_1 \vec{c}_1 + \xi_n\right) \quad \|\xi_n\|_2 = O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^n\right)$$

zatem

$$x_n = \left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}\right)^n \frac{\alpha_1 \vec{c}_1 + \xi_n}{\sqrt{\alpha_1^2 + 2\vec{c}_1^T \xi_n + \|\xi_n\|_2^2}}$$

Licząc iloraz Rayleigha

$$r_n = x_n^T A x_n = \frac{\alpha_1^2 \lambda_1 + 2\lambda_1 \alpha_1 \vec{c}_1^T \xi_n + \xi_n^T A \xi_n}{\alpha_1^2 + 2\vec{c}_1^T \xi_n + \|\xi_n\|_2^2}$$

Można zobaczyć, że moduły wszystkich członów gdzie pojawia się ξ_n raz można oszacować przez stała razy $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}^n$ a tam gdzie 2 razy czyli przez stała razy $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}^{2n}$ ostatecznie dostajemy

$$|r_n - \lambda_1| = O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^n\right).$$

Łatwo podać przykłady macierzy A takiej, że błąd tylko na poziomie $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^n$. Proszę np. wziąć $\lambda_1 = 2 * \lambda_2 = 1$ z $\vec{c}_1 = (1,0)^T$ i $\vec{c}_2 = (1,\epsilon)^T/\sqrt{1+\epsilon^2}$ z bardzo małym ϵ np. rzędu 10^{-10}. Wtedy np dla $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{c}_1 + \vec{c}_2)$ mamy $\xi_n = 0.5^n \vec{c}_2$ a np. człon $2\lambda_1 \alpha_1 c_1^T \xi_n = \frac{4}{\sqrt{2}} * 0.5^n \vec{c}_1^T \vec{c}_2 \approx \frac{4}{\sqrt{2}} * 0.5^n$. Z kolei człon $\xi_n^T A \xi_n = \alpha_2^2 * 0.5^{2n} \lambda_2 \|\vec{c}_2\|_2^2 \approx 0.25 * 0.5^{2n}$ tak więc ten człon znika bardzo szybko w porównaniu z poprzednim członem więc poprzedni człon dominuje błąd. Zachęcam do przeprowadzenie eksperymentu w octave'ie raz biorąc A jak powyżej raz symetryczną a raz z $\vec{c}_k$ prawie ortogonalnymi np $\vec{c}_1$ jak poprzednio a $\vec{c}_2 = (1, -1+\epsilon)^T$ - we wszystkich przypadkach o takich jak powyżej wartościach własnych.

Zadanie 4 Implementacja metody potęgowej: policz $B = A^k$ dla $k = 2^p$ poprzez podnoszenie do kwadratu macierzy a potem policz $x_k = Bx_0$ a standardowa implementacja - policz koszt przy założeniu że macierze gęste.

Rozwiązanie: Liczymy

$$A^{2^p} = (A^{2^{p-1}})^2$$

czyli by policzyć A^{2^p} stosujemy algorytm: $A_0 = A$ i dalej $A_k = A_{k-1} * A_{k-1}$ dla $k = 1, \ldots, p$ i na koniec liczymy $x_{2^p} = \frac{A_p x_0}{\|A_p x_0\|_2}$.

Koszt p mnożeń macierzy - koszt p razy $O(n^3)$ dla macierzy $n \times n$ jedno mnożenie macierzy przez wektor, norma wektora i skalowanie wektora czyli $O(n^2)$. Koszt uzyskania $l = 2^p$tej iteracji tą metodą $O(p * n^2) = O(\log_2(l) * n^3)$. Koszt standardowej metody koszt 1 iteracji razy $l = 2^p$ tzn. $O(l * n^2)$. Jeśli $l = 2^p > n * p$ opłaca się nowa metoda. Oczywiście przy założeniu, że mnożenie Ax kosztuje $O(n^2)$ co nie jest prawdą jeśli sprowadzimy macierz do macierzy podobnej w postaci Hessenberga jednorazowym kosztem $O(n^3)$.

Zadanie 5 Metoda potęgowa dla macierzy diagonalizowalnej ale o zespolonych parach własnych (1) gdy największa w module rzeczywista wartość własna (2) gdy największa w module wartość zespolona. Dokonaj analizy zbieżności przy dodatkowym założeniu, że wektor startowy ma normę drugą jeden i jego współczynniki w bazie własnej (zespolenje w drugim przypadku) są wszystkie niezerowe.

Zadanie 6 Metoda równoczesnych iteracji dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tzn. startujemy z $Q_0 = I \in \mathbb{R}^{n,2}$

$$\begin{aligned} &Y_k = AQ_{k-1} \\ &obliczamy: \; Q_k \; i \; R_k : \; Q_k R_k = Y_k \end{aligned}$$

Q_k o ortonormalnych kolumnach a R_k górnotrójkątna 2×2. pokaż, że kolumny Q_k zbiegną do wektorów własnych A.

Rozwiązanie: Popatrzmy na pierwsze kolumny macierzy Q_k - nietrudno pokazać, że to ciąg iteracji metody potęgowej startującej z pierwszego wersora, który nie jest ortogonalny do wektora własnego dla większej dodatniej wartości własnej, czyli jest zbieżny do tego wektora. Z kolei kolejne kolumny Q_k są ortogonalne do pierwszych kolumn więc w granicy takie pozostaną do granicy pierwszych kolumn czyli muszą być w podprestrzeni ortogonalnej do pierwszego wektora własnego, a to przestrzeń własna dla 2 wartości własnej.

Zadanie 7 Metoda Hymana - zadanie dodatkowe i trudne

Jak policzyć wartość wielomianu charakterystycznego i jego pochodnej w punkcie λ dla macierzy A $n \times n$ danej w postaci Hessenberga kosztem $O(n^2)$?

Zadanie 8 Dla QR z shiftami tzn dla następującej metody

$$A_0 = A$$

i dalej dla $k = 0, 1, 2, \ldots$ obliczamy kolejno rozkład QR macierzy:

$$A_k - m_k I = Q_k R_k$$

i liczymy

$$A_{k+1} = R_k Q_k + m_k I.$$

Pokaż że A_k są podobne do A.

Podaj wzór na wektory własne A przy założeniu, że znamy wektory własne A_k (w terminach Q_j, R_j $j \leq k$).