Zadania - normy i uwarunkowanie, układy równań liniowych

(Dwa terminy ćwiczeń - 3 i 8 kwietnia 2020)

Zadanie 1 Znajdź optymalne stałe równoważności dla p-tych norm dla $p = 1, 2, \infty$.

Rozwiązanie Pokażemy najtrudniejszy przypadek, że dla dowolnego wektora x w R^n zachodzi $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$ - - zauważmy że pierwsza norma to iloczyn skalarny wektora $(znak(x(k))_k$ z wektorem x i nierówność wprost wynika z nierówności Schwarza. Trzeba jeszcze pokazać optymalność, tzn. że nie ma mniejszej stałej... To wynika stąd że dla wektora o wszystkich współrzędnych jeden zachodzi równość.

Zadanie 2 A macierz kwadratowa nieosobliwa, $\|Ax\|$ jest normą dla dowolnej normy $\|x\|$?

Rozwiązanie To bardzo łatwe - proszę sprawdzić wprost warunki na normę.

Zadanie 3 Pokaż że jeśli $\|A\|$ jest normą indukowaną macierzową tzn $\|A\| := \max_{x \neq 0} \|Ax\|$ dla pewnej normy $\|x\|$ w R^n to

- $\|I\| = 0$
- $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.
- $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Rozwiązanie 2 pierwsze własności wynikają wprost z definicji. Ostatnia z drugiej też z definicji.

Zadanie 4 Pokaż że norma Frobeniusa $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{ij} |a_{ij}|^2}$ jest normą macierzową i że nie jest normą indukowaną przez żadną normę wektorową w R^n dla $n > 1$.

Rozwiązanie Norma Frobeniusa to po prostu norma druga dla wektora utworzonego z elementów macierzy. A że nie jest indukowana wynika z tego że $\|I\|_F \neq 1$.

Zadanie 5 Pokaż wzór na macierz indukowaną maksimum $\|A\|_\infty := \max_{x \neq 0} \|Ax\|_\infty$. Do domu na normę indukowaną pierwszą oraz wzory na te normy dla macierzy zespolonych.

Rozwiązanie wprost liczymy dla dowolnego x

$$\|Ax\|_\infty = \max_i |\sum_j a_{ij}x_j| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}|x_j| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}|\|x\|_\infty$$

stąd $\|A\|_\infty \le \max_i \sum_j |a_{ij}|$.

Nierówność w 2gą stronę wynika z tego że biorąc wektor $\hat{x} = (znak(a_{i_0 j})_j$ dla i_0 wiersza takiego, że $\sum_j |a_{i_0 j}| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ dostajemy $\|A\hat{x}\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| \|\hat{x}\|_\infty$ a to daje nierówność w 2gą stronę.

Zadanie 6 Pokaż że norma Frobeniusa z góry szacuje normę drugą ze stałą równą jeden. Znajdź optymalną stałą równoważności taką, że norma druga szacuje normę Frobeniusa.

Wskazówka Można pokazać, że $\|AB\|_F \le \|A\|_2 \|B\|_F$ - i biorąc $B = I$ dostajemy oszacowanie $\|A\|_F$ przez $\sqrt{n}\|A\|_2$. Czy dla jakiejś macierzy zajdzie równość? To by pokazało optymalność stałej.

Zadanie 7 Pokaż, że norma druga macierzy Q ortogonalnej ($Q^T Q = I$) wynosi jeden.

Zadanie 8 Q ortogonalna. Pokaż, że $\|QA\|_2 = \|AQ\|_2 = \|A\|_2$ oraz to samo dla normy Frobeniusa $\|QA\|_F = \|AQ\|_F = \|A\|_F$.

Zadanie 9 Pokaż że dla macierzy diagonalnej D jej norma druga indukowana wynosi $\max_k |d_{kk}|$.

Rozwiązanie Wprost otrzymujemy

$$\|Dx\|_2 = \sqrt{\sum_k (d_{kk} x_k)^2} \le \max_k |d_{kk}| \|x\|_2$$

co pokazuje że norma druga D szacuje się przez $\max_k |d_{kk}|$.

Zachodzi też równość $\|De_r\|_2 = |d_{rr}|$ dla r takiego, że $|d_{rr}| = \max_k |d_{kk}|$ i e_r r-tego wersora. A to daje oszacowanie w drugą stronę.

Zadanie 10 Pokaż, że lda macierzy symetrycznej A jej druga norma to maksimum z modułów wartości własnych.

Rozwiązanie Wynika to z tego że istnieją macierze ortogonalna Q i diagonalna D takie, że $A = QDQ^T$ - bardzo ważny fakt z algebry liniowej. Macierz D na diagonali ma oczywiście wartości własne A. Dalej teza zadania wynika z 2 poprzednich zadań.

Zadanie 11 Rozwiąż dwa układy $A_k x_k = b$ z

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0.98 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0.99 \end{pmatrix}.$$

i $b = (1, 2)^T$. Policz $\|x_1 - x_2\|_\infty$ i współczynnik uwarunkowania A_1 w normie maksimum.

Zadanie 12 Mamy dwa równoważne układu równań liniowych:

$$A_k x = f_k \qquad k = 1, 2$$

z

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-3} & -10^{-3} \end{pmatrix}.$$

Wiemy że$||A_k x_k - f_k||_1 = 10^{-6}$ dla pewnych wektorów x_k. Dla którego k prawdziwe jest oszacowanie $||x_k - x||_1 < 10^{-4}$? (x_k możemy potraktować jako przybliżone rozwiązania tych układów otrzymane jakimś algorytmem).

Zadanie 13 Dla macierzy g-trójkątnej dwudiagonalnej U o jedynkach na diagonali a minus jeden na superdiagonali znajdź jej macierz odwrotną U^{-1}. Czy jest też pasmowa? Wywnioskuj, która z metod rozwiązania układu liniowego z tą macierzą $Ux = f$ będzie tańsza w sensie ilości operacji arytmetycznych - podstawianie wstecz (oczywiście uwzględniającej postać macierzy) czy mnożenie przez macierz odwrotną, tj. $x = U^{-1} f$ nam już znaną.

Rozwiązanie Nietrudno policzyć że. macierz odwrotna g-trójkątna ma same jedynki na diagonali i ponad nią. Mnożenie przez nią kosztuje $O(n^2)$ gdy odpowiedni wariant podstawiania w tył będzie kosztował $O(n)$ operacji arytmetycznych - wymaga też mniej pamięci.

Zadanie 14 Dla macierzy górnotrójkątnej U_1 $N \times N$ ze wszystkimi elementami równymi jeden znajdź macierz odwrotną i policz jej uwarunkowanie w normie pierwszej. Powtórz zadanie dla $U_2 = U_1 - 2 * I$ tzn dla macierzy g-trójkątnej z minus jeden na diagonali i jedynkami powyżej diagonali. WSK: Należy rozwiązać równanie $U_k x_k = e_k$ - dowolny wersor.