Aproksymacja jednostajna i średniokwadratowa

Na aproksymacje jednostajną są też zadania nr 13 do końca serii zadań na interpolację przekopiowałem je do tej serii (z innymi nr).

Zadanie 1 Dla $f(x)$ ściśle wypukłej ($f'' > 0$) szukamy $w_f \in \mathcal{P}_1$ wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej tzn.

$$\|w_f - f\|_{\infty,[a,b]} = \min_{v \in \mathcal{P}_1} \|v - f\|_{\infty,[a,b]}$$

dla $\|g\|_{\infty,[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$. Tu $\mathcal{P}_k$ przestrzeń wielomianów stopnia $\leq k$. Pokaż, że alternans to a, ξ, b dla jedynego ξ takiego, że

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

następnie znajdź wzory na w_1 zależne od ξ.

Rozwiązanie: Funkcja f ściśle wypukła więc $f - w_f$ też, i może mieć tylko 1 pkt ekstremalny w (a, b) w którym pochodna się zeruje... Dalej wypisujemy wzory na alternans dla $w_f = \alpha x + \beta$:

$$\begin{aligned} f(a) - \alpha * a - \beta &= \gamma \\ f(\xi) - \alpha * \xi - \beta &= -\gamma \\ f(b) - \alpha * b - \beta &= \gamma \end{aligned}$$

stąd mamy odejmując pierwsze równanie od trzeciego: $\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ i dodatkowo

$$\frac{d}{dx}(f - w_f)(\xi) = f'(\xi) - \alpha = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

ponieważ ξ pkt alternansu jest ekstremum $f - w_f$. Znając ξ - trzeba rozwiązać nieliniowe równanie $f'(\xi) = 0$ - wyliczamy β dodając 2 ostanie równania na alternans:

$$\beta = 0.5(f(\xi) + f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(\xi + b))$$

i $\gamma = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} * b - \beta$.

Zadanie 2 Dla $f(x) = |x|$ znajdź $w_f \in \mathcal{P}_1$ wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej tzn.

$$\|w_f - f\|_{\infty,[-1,1]} = \min_{v \in \mathcal{P}_1} \|v - f\|_{\infty,[-1,1]}$$

dla $\|g\|_{\infty,[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$. Tu $\mathcal{P}_k$ przestrzeń wielomianów stopnia $\leq k$.

Rozwiązanie: Jak aproksymacja jednostajna to tw. o alternansie, popatrzmy gdzie $|x| - p_1$ może mieć ekstrema? W końcach i w punkcie $x = 0$ to są 3 pkty irylko one mogą tworzyć alternans. Dalej rozwiązujemy układ liniowy:

$$\begin{aligned} |-1| - a(-1) - b &= -\alpha \\ |0| - a * 0 - b &= \alpha \\ |1| - a * 1 - b &= -\alpha \end{aligned}$$

gdzie $|\alpha| = \|f - p_1\|_\infty$ czyli $b = -\alpha = 0.5$ i $a = 0$ - można było zgadnąć... Gdyby zastąpić $[-1, 1]$ przez np. $[-4, 1]$ to alternans byłby $-4, 0, 1$.

Zadanie 3 Dla $f(x) = x^8 - 64x + \sqrt{7}$ znajdź $w_f \in \mathcal{P}_1$ wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej tzn.

$$\|w_f - f\|_{\infty,[1,2]} = \min_{v\in\mathcal{P}_1} \|v - f\|_{\infty,[1,2]}$$

dla $\|g\|_{\infty,[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$. Tu $\mathcal{P}_k$ przestrzeni wielomianów stopnie $\leq k$.

Rozwiązanie: To zadanie na własności wielomianów Czebyszewa: dla $w_8 = x^8 + \ldots$ zadanie zminimalizowania $\|x^8 - p_7\|_{\infty,[a,b]}$ po wielomianach st. ≤ 7 daje, że optymalny wielomian st. 7 to

$$p_7 = w_8(t) - T_8(x(t))2^{-7}(0.5 * (b - a))^8 \qquad x(t) = \frac{2}{b-a}(t - \frac{a+b}{2})$$

gdzie ten drugi to liniowo przeskalowany i przeciągnięty 8 wielomian Czebyszewa. Alternans to liniowo przekształcone ekstrema T_8 na $[a, b]$.

Zadanie 4 Czy istnieje takie L że wielomianem najlepszej aproksymacji jednostajnej w $\mathcal{P}_4$ na $[0, L]$ dla $f(x) = \sin(\pi x)$ będzie $w_f = 0$?

Wskazówka: określ warunek na alternans w tym przypadku i policz ekstrema $f = f - w_f$

Zadanie 5 Dla $f(x) = x^4$ znajdź kubiczny wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej na $[-1, 1]$.

Zadanie 6 Dla $f(x) = (x - 2)^3$ znajdź kwadratowy wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej na $[0, 4]$.

Zadanie 7 Oszacuj błąd między f i p_n wielomianem interpolującym $f(x) = \sin(x)$ na $[-\pi, 2\pi]$ w $n+1$ węzłach Czebyszewa na tym odcinku w normie maksimum. Czy błąd maleje do zera z n zdążającym do nieskończoności? Czy jeśli weźmiemy $f(x) = \sin(100x)$ to błąd interpolacji w tych węzłach też będzie malał do zera?

Zadanie 8 Jak dobrać x_k aby czynnik

$$\|\Pi_{k=0}^{n}(x-x_k)\|_{\infty,[a,b]}$$

w oszacowaniu błędu interpolacji był możliwie mały? Dla $[a, b]$

- $[-1, 1]$
- $[0, 2]$
- $[0, 10]$

Rozwiązanie Trzeba skorzystać z minimalizacyjnej własności wielomianów Czebyszewa.

$$\min_{w=x^m+\dots} \|w\|_{\infty,[-1,1]} = \|2^{-m+1}T_m\|_{\infty,[-1,1]} = 2^{-m+1}$$

i dodatkowo T_n ma n różnych zer w $[-1, 1]$, które możemy policzyć wiedząc, że:

$$T_{n+1} = \cos((n+1) * \arccos(x)).$$

$n+1$ wielomian Czebyszewa. Stąd na $[-1, 1]$ od razu mamy węzły t_k (dlaczego?) to zera T_{n+1}, a na dowolnym $[a, b]$ to $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_k$ - liniowo przeskalowane zera T_{n+1} z $[-1, 1]$. Wtedy

$$\begin{aligned} \|\Pi_{k=0}^{n}(x-x_k)\|_{\infty,[a,b]} &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \|\Pi_{k=0}^{n}(t-t_k)\|_{\infty,[-1,1]} \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \|2^{-n}T_{n+1}\|_{\infty,[-1,1]} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} 2^{-n}. \end{aligned}$$

Zadanie 9 Policz wartości pierwiastków $n+1$ wielomianu Czebyszewa oraz jego punkty ekstremalne.

Rozwiązanie Wprost ze wzoru

$$T_{n+1} = \cos((n+1) * \arccos(x)).$$

liczymy (przyrównujemy do zero lub jeden lub minus jeden odpowiednio) i dostajemy:

$$\begin{aligned} \cos((n+1) * \arccos(x_k)) &= 0 \\ (n+1) * \arccos(x_k)) &= \pi/2 + k * \pi \\ x_k = \cos\left(\frac{0.5+k}{n+1}\pi\right) &\quad k = 0, \dots, n. \end{aligned}$$

Wzieliśmy takie k dla których $\frac{0.5+k}{n+1}\pi$ jest w przeciwdziedzinie arccos czyli $[0, \pi]$. Analogicznie wyznaczamy pkty ekstremalne:

$$e_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \quad k = 0, \dots, n+1$$

dla k parzystych T_{n+1} przyjmuje wartość jeden dla nieparzystych minus jeden, na zmianę.

Zadanie 10 Oszacuj błąd interpolacji na węzłach optymalnych Czebyszewa dla $\log(1+x)$ na $[0,1]$ i $[0,10]$. Czy oszacowanie błędu maleje do zera dla rosnącej ilości węzłów?

Zadanie 11 Znajdź p wielomian stopni ≤ 5 taki że

$$\min_{w \in P_n} \|x^6 - w\|_{\infty,[-1,1]} = \|x^6 - p\|_{\infty,[-1,1]}.$$

Zadanie 12 Niech $\mathcal{A}_{a,b,n} = \{w \in P_n : w(a) = b\}$ dla $a \notin [-1,1]$ i $b \neq 0$. Znajdź $p \in \mathcal{A}_{a,b,n}$ wielomian stopni $\leq n$ taki że

$$\min_{w \in \mathcal{A}_{a,b,n}} \|w\|_{\infty,[-1,1]} = \|p\|_{\infty,[-1,1]}.$$

Zadanie 13 Oszacuj błąd interpolacji Hermite'a na $n+1$ podwójnych węzłach Czebyszewa dla $\sin(x)$ na $[0,3]$ w normie maximum na tym przedziale w zależności od n. Czy błąd dla $n = 4$ będzie mniejszy od 0.01?

Rozwiązanie Wprost z wzoru na błąd mamy:

$$\|f - H_{2n+1}f\|_{\infty,[0,3]} \leq \frac{\|f^{(2n+2)}\|_{\infty,[0,3]}}{(2n+2)!} \|\Pi_{k=0}^{n+1}(x - x_k)^2\|_{\infty,[0,3]}$$

ale $|f^{(k)}(x)| \leq 1$ a

$$\|\Pi_{k=0}^{n+1}(x - x_k)\|_{\infty,[0,3]} = 2^{-n} \left(\frac{3-0}{2}\right)^{n+1}$$

- skorzystaliśmy z oszacowania na węzły Czebyszewa. czyli

$$\|f - H_{2n+1}f\|_{\infty,[0,3]} \leq \frac{1}{(2n+2)!} 2^{-2n} (1.5)^{2n+2} = \frac{1.5^2}{(2n+2)!} (0.75)^{2n}$$

Dla $n = 4$ proszę podstawić...

Zadanie 14 Rozpatrzmy $g(x) = \sin(x)$ i zadania znalezienia wielomianów najlepszej aproksymacji dla g: $w_1 \in V_1 = \mathcal{P}_n$ i $w_2 \in V_2 = \mathcal{P}_{n-1}$ dla $n > 0$ w normie:

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx}.$$

(a) Znajdź w_1, w_2 dla $n = 1$.

(b) Dla jakich $n > 0$ prawdą jest, że $w_1 = w_2$? Uzasadnij odpowiedź.

Rozwiązanie W pkcie 1 w_k to rzut ortogonalny g na $\mathcal{P}_k$ w iloczynie skalarnym $(f,h) = \int_{-po}^{\pi} fhdx$ i żeby je policzyć albo rozwiązujemy układ z macierzą Gramma w jakiejś bazie $\mathcal{P}_k$ albo ortogonalizujemy jakąś. bazę $\mathcal{P}_k$ (najlepiej z wielomianami kolejnych stopni...) albo korzystamy z reguły trójczłonowej by dostać kolejne 3 wielomiany ortogonalne w tym iloczynie skalarnym. Albo zauważamy że dla analogicznego iloczynu skalarnego znamy wielomiany ortogonalne tzn wielomiany Legendre'a i ich regułę 3członową i odpowiednio z tego korzystamy by dostać wiel. ortogonalne u nas.

Ja bym wybrał metodę nr 1 lub 2 i o ile się nie pomyliliśmy $w_1 = w_2$... Pkt 2gi pyta czy to można uogólnić - tak ponieważ $\sin(x)$ jest funkcją nieparzystą więc wielomian najlepszej aproksymacji też takową musi być w każdym iloczynie skalarnym dającym normę taką, że $\|f(x)\| = \|f(-x)\|$ (dlaczego?) - to widać też z postaci układu z macierzą Gramma w bazie potęgowej dla dowolnego $\mathcal{P}_n$. Dla k parzystych $(\sin, x^k) = 0$ i w macierzy $(x^k, x^l) = 0$ gdy $k + l$ nieparzyste. Można też pokazać że $k$ty wielomian ortogonalny jest f. parzystą dla k parzystego, nieparzystą dla nieparzystego i $(\sin, p) =$ o ile p funkcja parzysta.

Zadanie 15 Dla iloczynu skalarnego w przestrzeni wielomianów $\mathcal{P}_N$ $(p,q) = \sum_{k=0}^{N}(k+1)p_k q_k$ dla $p = \sum_{0\le k\le N} p_j x^j$ and $q = \sum_{0\le k\le N} q_j x^j$ znajdź bazę ortogonalną wielomianów kolejnych stopni oraz wielomian najlepszej aproksymacji w $\mathcal{P}_3$ dla $f = x^7 - x^2 - 1$.

Zadanie 16 Niech $V = \{w \in \mathcal{P}_3 : w(t) = -w(-t)\}$. Znajdź dla $f = \sin(x)$ taki $w_f \in V$, że

$$\|w_f - f\| = \min_{v\in V} \|v - f\|$$

dla $\|g\|^2 = \int_{-1}^{1} |g(t)|^2\, dt + |g(0)|^2$ i $\mathcal{P}_3$ przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3.

Wsk: Pokaż że to norma generowana przez odpowiedni iloczyn skalarny

Zadanie 17 Niech $V = \{w \in \mathcal{P}_4 : w(-1) = 0\}$. Znajdź dla $f = \cos(x)$ taki $w_f \in V$, że

$$\|w_f - f\| = \min_{v\in V} \|v - f\|$$

dla $\|g\|^2 = \int_{-1}^{1} |g'(t)|^2\, dt$. Tu $\mathcal{P}_k$ przestrzeń wielomianów stopnia $\le k$.

Wsk: Pokaż że to norma generowana przez odpowiedni iloczyn skalarny. (ale nie typu L^2 - nie można użyć reguły 3członowej wprost z wiedzy z wykładu... a może jest?).

Zadanie 18 Pokaż że jeśli waga ρ jest funkcją parzystą to P_k jest odpowiednio funkcją nieparzystą wtedy i tylko wtedy gdy $k > 0$ nieparzyste. Tu P_k k-ty wielomian ortogonalny w $L^2_\rho(-1,1)$.

Zadanie 19 Znajdź wzory na regułę trójczłonową dla wielomianów **ortonormalnych** w $L^2_g(a,b)$ dla wagi g.

Zadanie 20 Znajdź 2gi wielomian ortogonalny w $L^2_\rho(0,2)$ dla wagi $\rho = 1$. Znajdź element najlepszej aprosymacji w przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 2 dla $f(x) = \sin(x-1)$ w tej przestrzeni. Wystarczy znaleźć współczynniki w jakiejkolwiek bazie tej przestrzeni.