Seria zadań domowych - fl, normy, rozkład LU

Zadania oznaczone jako trudne nie będą na kartkówce.

Zadanie 1 Chcemy obliczyć funkcję $f(x) = \exp(10^7 x)$ w arytmetyce pojedynczej precyzji. Policz (przybliżony i względny) współczynnik uwarunkowania zadania dla $x \in [-10, 10]$ i określ czy obliczanie w tej arytmetyce fl wartości f dla $x = -6$ jest dobrze uwarunkowane ze względu na błąd względny?

Zadanie 2 Chcemy w fl obliczyć $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 + 7}$. Rozpatrzmy dwa algorytmy: w pierwszym liczymy:

$f := \sqrt{4x^2 + 7}; f := 2x - f;$

a w drugim:

$f := \sqrt{4x^2 + 7}; f := -7.0/(2x + f);$

Który z nich należy zastosować do obliczenia w arytmetyce fl pojedynczej precyzji $f(10^7)$? (Podać krótkie uzasadnienie - 1-2 zdania - nie trzeba formalnie dowodzić oszacowań)

Zadanie 3 (trudne) Pokaż, że następujące algorytmy obliczania: $4a^2 - b^2$ są numerycznie poprawne: Algorytm 1: $w1 = 4{*}a{*}a; w2 = b{*}b; w = w1 - w2$. Algorytm 2: $w1 = 2 * a - b; w2 = 2 * a + b; w = w1 * w2$.

Zadanie 4 Rozważmy następujący algorytm obliczania: $9a^2 - b^2$: $w1 = 9 * a * a; w2 = b * b; w = w1 - w2$. napisz wyrażenie na błąd bezwględny tego algorytmu wykonanego w arytmetyce fl (przy założeniu że nie zajdzie nadmiar czy niedomiar).

Zadanie 5 Chcemy obliczyć wartość funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$ dla $x = 1 + 10^{-6}$. Policz współczynnik uwarunkowanie tego zadania dla tego x i określ czy jest duży/mały w pojedynczej precyzji.

Do obliczania $f(x)$ zastosowano 2 algorytmy: alg 1: $w1 = (x - 1)$ i $w = w1{*}w1{*}w1$; alg 2: $w = -1$, $w = w{+}3{*}x$, $w = w{-}3{*}x{*}x$ i $w = w{+}x{*}x{*}x$

Pokaż że pierwszy z nich jest numerycznie poprawny. (Co do drugiego nie wiadomo...)

Zadanie 6 (trudne) Oblicz współczynnik uwarunkowania zadania obliczania funkcji ze względu na zaburzenie x

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ (y + 2)(x^3 - 1) \end{pmatrix}$$

w normie maksimum dla $(x,y) = (-3,3)$.
Wskazówka: można potraktować $f = (f_1, f_2)$ jako funkcje jednej zmiennej x z $y = 2$ jako parametrem i dla x' bliskich x zachodzi

$$\|f(x,y) - f(x',y)\|_\infty \approx \|D_x f(x,y)\|_\infty * |x' - x|$$

i i wstawić to do wzoru na uwarunkowanie otrzymując

$$\max_{|x-x'|\leq\epsilon|x|} \frac{\frac{\|f(x,y)-f(x',y)\|_\infty}{\|f(x,y)\|_\infty}}{\frac{|x-x'|}{|x|}} \approx \frac{\|D_x f(x,y)\|_\infty * |x|}{\|f(x,y)\|_\infty}.$$

Zadanie 7 (trudne) Pokaż, że następujący naturalny algorytm obliczania: iloczynu skalarnego dwóch wektorów $x, y \in \mathbb{R}^M$ tzn. $x^T y = \sum_{k=1}^M x(k)y(k)$ jest numerycznie poprawny tzn. obliczamy

```
s=x(1)*y(1);
for  k=2:M,
   s=s+x(k)*y(k);
endfor
```

Zadanie 8 (trudne) Pokaż, że następujący naturalny algorytm obliczania iloczynu macierz kwadratowej $A \in \mathbb{R}^{M,M}$ i wektora $x, \in \mathbb{R}^M$ tzn. $y = Ax$: jest numerycznie poprawny:

```
for  j=1:M,
 y(j)=0;
 for k=1:M,
   y(j)=y(j)+A(j,k)*x(k);
 endfor
endfor
```

Wskazówka: $w(j)$ jest iloczynem skalarnym $j-$tego wiersza A z x.

Zadanie 9 (trudne) Pokaż, że następujący naturalny algorytm obliczania: cosinusa kąta dwóch wektorów $x, y \in \mathbb{R}^M$ tzn. $\cos(x,y) = \frac{x^T y}{\sqrt{x^T x}\sqrt{y^T y}}$ jest numerycznie poprawny:

(a) $a = \sqrt{\sum_{k=1}^M x_k^2}$, $b = \sqrt{\sum_{k=1}^M y_k^2}$

(b) $c = \sum_{k=1}^M x_k y_k$

(c) $w = c/(a * b)$

Zakładamy że wynikiem funkcji pierwiastek w arytmetyce fl jest $fl(\sqrt{x}) = x(1+\epsilon)$ dla $|\epsilon| \leq \nu$ i obliczanie iloczynu skalarnego $w^T z$ jest standardowe jak w zadaniu na NP obliczania iloczynu skalarnego.

Zadanie 10 Mamy układ równań liniowych $Ax = f$ z wektorem prawej strony $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$ i A macierzą rzeczywistą $n \times n$, mającą elementy niezerowe tylko w ostatniej kolumnie i na 3 głównych diagonalach tzn:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \vdots & d_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & b_{n-3} & a_{n-2} & c_{n-2} & d_{n-2} \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

silnie diagonalnie dominującą wierszowo. Opisz w pseudokodzie algorytm rozwiązywania tego układu będący odpowiednią wersją eliminacji Gaussa (rozkładu LU) bez wybory elementu głównego możliwie niskim koszcie względem n. Podaj ten koszt (jako $Cn^p + O(n^{p-1})$ dla stałej dodatniej C i p naturalnego).

Zadanie 11 Treść jak w zadaniu 10 ale dla

- układu równań liniowych $A^T x = f$ z A z zadania 10,
- układu równań następującej postaci:

$$b_k x_{k-1} + a_k x_k + c_k x_{k+1} = f_k \qquad k = 1, \ldots, n,$$

  przyjmując, że $x_0 = x_n$ i $x_{n+1} = x_1$, tzn. macierz jest trójdiagonalna + 2 elementy niezerowe w 2 pozostałych rogach. Współczynniki a_k, b_k, c_k, f_k dane.

Zadanie 12 Napisz w pseudokodzie algorytm rekurencyjny Choleskiego polegajacy na tym, że dzielimy macierz $A = A^T > 0$ na 4 bloki mniej więcej podobnych wielkości (przy parzystym wymiarze na równe) tzn.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

i szukamy macierzy górnotrójkątnej

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix}$$

wyznaczając bloki R_{11}, R_{22} odpowiednim wywołaniem rekurencyjnym tej funkcji. Powinnismy otrzymać czynnik g-trójkątny rokładu Choleskiego taki, że $A = R^T R$.

Algorytm powinien sprawdzić czy A dodatnio określona - symetryczności sprawdzać nie musi.

Zadanie 13 Znamy rozkład Choleskiego LDL^T macierzy $A = A^T > 0$ wymiaru $m \times m$. Jak możliwie tanio wyznaczyć element macierzy odwrotnej A^{-1} na pozycji $(1, 1)$, tzn. w pierwszym wierszu i pierwszej kolumnie.

Zadanie 14 Sprawdź czy dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

istnieje rozkład LU a jeśli tak to go wyznacz (przyjmując że macierz L ma jedynki na diagonali). Jeśli nie to wyznacz za pomocą algorytmu eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu głównego (częściowym osiowaniem) macierz permutacji P oraz czynniki rozkładu tak aby ten rozkład istniał dla PA.

Zadanie 15 Dla której z macierzy A_k istnieje dolnotrójkątny czynnik rozkładu Choleskiego L_k z dodatnimi elementami na diagonali (tzn: $A_k = L_k L_k^T$):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ -1 & 12 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 10 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Podaj uzasadnienie nieistnienia czynnika Choleskiego lub **policz ten czynnik**.

Zadanie 16 Dla której z macierzy A_k istnieją czynniki rozkładu LU tzn dolnotrójkątna macierz L_k z jedynkami na diagonali i U_k górnotrójkątna macierz z dodatnimi elementami na diagonali takie, że $A_k = L_k U_k$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 7 \\ -8 & -6 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 10 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 12 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Podaj uzasadnienie nieistnienia czynników rozkładu LU lub **policz te czynniki**.

Zadanie 17 Znajdź czynniki rozkładu LU macierzy A obliczne za pomocą eliminacji z częściowym wyborem elementu głównego (częsciowe osiowanie) i rozwiąż układ $Ax = b$ z użyciem tego rozkładu dla:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix},$$

Zadanie 18 Dla wektora rzeczywistego $x = (x_i)_{i=1}^m$ definiujemy $|x| = (|x_i|)_{i=1}^m$. Dla norm p-tych zachodzi zawsze $\|x\|_p = \||x|\|_p$. Czy istnieje norma $\|\cdot\|$ w $\mathbb{R}^2$ dla której istnieje wektor x taki, że $\|x\| \neq \||x|\|$? Uzasadnij (w przypadku na tak podaj definicję normy).

Zadanie 19 Dla macierzy rzeczywistej $A = (a_{ij})_{i,j}$ $n \times n$ zdefiniujmy $|A| = (|a_{ij}|)_{ij}$.

(a) Czy dla normy Frobeniusa, maksimum i pierwszej zachodzi równość norm A i $|A|$? Wsk: Istnieją proste wzory na te normy zależne od współczynników macierzy.

(b) (trudne) - choć tak naprawdę dość łatwe.... Pokaż np wprost z definicji normy indukowanej, że

$$\|A\|_2 \leq \||A|\|_2.$$

(c) (trudne) Podaj kontrprzykład, że odwrotna nierówność nie zawsze zachodzi. Wsk: Można skonstruować kontrprzykład $A = A^T$ 2×2 korzystając ze wzoru: $\|A\|_2 = \rho(A)$ - dla $A = A^T$. Tu $\rho(A)$ moduł największej co do modułu wartości własnej A.

Zadanie 20 Dla macierzy A wymiaru 10×10 z Zadania 10 dla $a_k = d_k = -b_k = -c_k = 1$ dla wszystkich odpowiednich k, oblicz indukowaną normę maksimum i normę pierwszą tzn. $\|A\|_\infty$ i $\|A\|_1$ i wyznacz takie dwa niezerowe wektory x_1 i x_2, że $\|x_1\|_\infty \|A\|_\infty = \|Ax_1\|_\infty$ i $\|x_2\|_1 \|A\|_1 = \|Ax_2\|_1$. Czy wektory x_k są wyznaczone w obu przypadkach jednoznacznie (z dokładnością do mnożenia przez -1)?

Zadanie 21 Podaj przykład normy $\|\cdot\|$ w $\mathbb{R}^2$ dla której optymalne stałe równoważności z normą drugą to 1 i 10^{50} tzn. :

$$\forall x \qquad \|x\|_2 \leq \|x\| \leq 10^{50} \|x\|_2$$

i dla pewnych niezerowych wektorów zachodzą równości zamiast nierówności.

Zadanie 22 Po rozwiązaniu w arytmetyce fl pewnego układu równań w n-wymiarach $Ax^* = b$ otrzymano $\hat{x}$ przybliżenie rozwiązania dla którego zachodzi oszacowanie $\|\hat{x} - x^*\| \leq 10^{-16}$w pewnej normie w $\mathbb{R}^n$. Czy zawsze prawdziwe jest wtedy oszacowanie w normie drugiej $\|\hat{x} - x^*\|_2 \leq 10^{-16}$ jeśli:

(a) $n = 3$ ale nic nie wiemy o normie $\|\cdot\|$ (poza tym, że to norma w R^n)

(b) $n = 100$ a jest to norma maximum tzn. $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$.

(c) $n = 100$ a jest to norma pierwsza tzn. $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$.

Zadanie 23 Znajdź możliwe duże $c > 0$ i możliwie małe $C > 0$, być może zależne od k, że dla normy wektorowej w $\mathbb{R}^k$: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} j^{-1}|x_j|^2}$ zachodzi

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^k \qquad c\|\vec{x}\|_2 \le \|\vec{x}\| \le C\|\vec{x}\|_2$$

Stałe c, C nazywamy stałymi równoważności między normą drugą a normą $\|\cdot\|$.

Zadanie 24 Pokaż że dla $x \in \mathbb{R}^n$:

- zachodzi
$$\|x\|_2 = \sup_{y\neq 0} \frac{x^T y}{\|y\|_2}, \qquad \|x\|_1 = \sup_{y\neq 0} \frac{x^T y}{\|y\|_\infty}, \quad \|x\|_\infty = \sup_{y\neq 0} \frac{x^T y}{\|y\|_1}$$

- (trudne) ogólniej, że
$$\|x\|_q = \sup_{y\neq 0} \frac{x^T y}{\|y\|_p}$$
dla dowolnych $p, q \ge 1$ takich, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.