Kolokwium MO 19 kwietnia 2013 - 830

Zad 1 Rozważamy funkcję

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + x - 1.$$

(a) Pokaż, że f ma jedyne miejsce zerowe r w przedziale $(0, 1)$.

(b) Pokaż, że gdy do przybliżonego wyznaczenia r stosujemy metodę Newtona. dla dowolnego punktu startowego $x_0 \in (0, 1)$ otrzymamy ciąg przybliżeń x_n zbieżny do r.

(c) Pokaż, że zbieżność jest dokładnie kwadratowa.

Zad 2 Uzasadnij, że macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

ma rozkład Choleskiego i znajdź go. Stosując ten rozkład rozwiąż układ równań $Ax = b$ dla $b = [-1, 0, 4, 7]^{\mathrm{T}}$.

Zad 3 Poszukuje się wielomianu parzystego $w(x) = a + b * x^2$ spełniającego warunek

$$\sum_{i=1}^{4} (w(x_i) - y_i)^2 = min$$

dla danych z tabeli

x_i	0	-1	0	0
y_i	1	2	0	-1

(a) Sformułuj to zadanie jako LZNK z macierzą A i wektorem f.

(b) Znajdź rozkład QR macierzy A metodą Householdera.

(c) Zastosuj ten rozkład do rozwiązania LZNK.

Kolokwium MO 19 kwietnia 2013 - 1215

Zad 1 Rozważmy równanie $f(x) = x^2 + \exp(x) - 7 = 0$.

(a) Pokaż że ma ono jedyne rozwiązanie x^* na $[1, 2]$?

(b) Czy dla metody Newtona generującej ciąg przybliżeń x_k istnieje $U \subset (1, 2)$ otoczenie rozwiązania x^*, takie że dla $x_0 \in U$ metoda zbiegnie do x^*? Jesli tak to określ rząd zbieżności tej metody.

(c) Czy metoda zbiegnie dla $x_0 = 2$? Jeśli tak to oszacuj możliwie dokładnie błąd: $|x_{10} - x^*|$.

Zad 2 Czy macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ma rozkład LU dla L z jedynkami na diagonali. Jeśli tak oblicz jego czynniki. Jeśli nie to oblicz czynniki rozkładu LU tej macierzy przy pomocy eliminacji Gaussa z częściowym osiowaniem (wyborem elementu głównego)

Stosując ten rozkład znajdź czwartą kolumnę macierzy A^{-1}.

Zad 3 Dla zadanych N punktów (x_k, y_k, z_k) w $\mathbb{R}^3$ chcemy znaleźć płaszczyznę postaci

$$p(x, y, z) = ax + by + cz - 1 = 0$$

dla której wspólczynniki a, b, c minimalizują nastepującą funkcję:

$$\sum_{k=1}^{N} |p(x_k, y_k, z_k)|^2$$

- Sformułuj to zadanie jako LZNK z macierzą A i wektorem f i określ warunek na punkty gwarantujący że jest to regularne LZNK.
- Policz A i f dla punktów: $(0, 0, 1), (2, 0, 1), (0, 0, -1), (0, 1, 1)$ i znajdź rozkład QR macierzy A za pomocą metody Householdera.
- Rozwiąż LZNK korzystając z tego rozkładu QR macierzy A.