Egzamin z obliczeń naukowych 2006
19 czerwca 2006, godz:13-16

Uwagi wstępne

Wyniki wszystkich zadań z octave'a w jednym skrypcie i m-plikach.

Wyniki zadania z Bibliotek: jeden plik w C zawierający cały kod - i Makefile - komenda *make* ma kompilować program. Wyniki zadań teoretycznych max. jedna strona A4. Wszystkie pliki wysyłacie Państwo mailem na adres: `lmarcin@mimuw.edu.pl` lub `przykry@mimuw.edu.pl` -w zależności od osoby pilnującej, temat maila egzamin ON 06.

Niech **K** będzie sumą z zadań z Octave'a i Bibliotek komputerowych a **T** sumą punktów z zadań teoretycznych.

Warunkiem dopuszczenia do egzaminu ustnego jest $\mathbf{K} \geq \mathbf{10}$ i wtedy propozycję oceny będzie zależeć od $\mathbf{K} + \mathbf{T}$.

Octave

Mamy nieliniowe zagadnienie brzegowe:

$$-u'' + 2\alpha * u' + u^2 = f \qquad u(0) = u(1) = 0$$

Po dyskretyzacji na siatce równomiernej otrzymujemy następujący układ N równań algebraicznych ($x_k \approx u(k * h)$ dla $h = \frac{1}{N+1}$):

$$(N+1)^2 * A\vec{x} + (N+1) * \alpha * B * \vec{x} + \vec{x}. * \vec{x} \;=\; \vec{f} \tag{1}$$

gdzie α parametr, $\vec{x}. * \vec{x} = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_N^2)^T$, $\quad f = (1, 1 \ldots, 1)^T$ i

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

We wszystkich zadaniach $N = 100$.

Zadanie 1 (4pkt) Utwórz funkcje Octave'a o nazwie `mat` której parametrem będzie N zwracającą macierze A i B.

Zadanie 2 (4pkt) Rozwiąż równanie (1) przy pomocy odpowiednich narzędzi Octave'a dla $N = 100$ i $\alpha = -10, 10, 20$.

Zadanie 3 (3pkt) Znajdź we wszystkich przypadkach dyskretne normy supremum rozwiązań z poprzedniego zadania oraz punkty w których są one osiągane.

Zadanie 4 (4pkt) Narysuj wykresy rozwiązań z zadania 2 dla $\alpha = -10, 10, 20$ na jednym wykresie (tak aby było wiadomo która krzywa odpowiada któremu wykresowi)!

Biblioteki

Zadanie 5 (10pkt) Napisać funkcję w C która wykorzystując funkcje `dgesv` i `dgelss` z Lapacka dla A macierzy rzeczywistej $M \times N$ i wektora f długości M zwróci wektor x taki że:

- x rozwiązanie $Ax = f$ obliczone przy pomocy `dgesv` gdy $M = N$ i A nieosobliwa
- x rozwiązanie LZNK tzn $\|Ax - f\|_2 = \min_y \|Ay - f\|_2$ obliczone przy pomocy `dgelss` gdy $M \neq N$ lub kiedy $M = N$ i `dgesv` nie jest w stanie rozwiązać układu czyli jak A osobliwa.

Gdy $M = N$ i układ $Ax = f$ nie ma rozwiązania to funkcja powinna wydrukować na ekran komunikat o tym!

Parametry funkcji - macierz A, wektor x, wymiary M, N - wynik ma być zwracany w nadpisanym wektorze x.

Zastosuj funkcję dla $f = (2, 0)^T$ i macierzy:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

tzn napisać krótki program w którym zastosują Państwo swoją funkcję do rozwiązania problemów $A_k x_k = f \;\; k = 1, 2$.

Wyniki tzn $x_k \; k = 1, 2$ wyprowadzić na ekran: w kolejnych dwu liniach - x_1 i x_2.

Teoria

Zadanie 6 (4pkt) W wyniku stosowania zamkniętego schematu Eulera do zagadnienia $y' = f(y);\; y(t_0) = y0 \quad f : G \subset R^n \to R^n$ otrzymujemy następujący nieliniowy układ ($y_n \in G$ dane):

$$y_{n+1} = y_n + h * f(y_{n+1})$$

Zakładając że mamy procedure obliczającą $f(x)$ dla danego wektora x napisz jak zaimplementować metode Newtona rozwiązującą ten układ. Jakie są wystarczające warunki na f i h aby metoda Newtona była dobrze zdefiniowana i zbieżna lokalnie kwadratowo?

Zadanie 7 (1pkt) mamy zadanie wymnożenia dwu macierzy $N \times N$. Rozpatrzmy dwa przypadki $N = 1024$ i $N = 1025$. Kiedy możemy się spodziewać lepszego wykorzystania cache'u (przy zwykłym algorytmie mnożenia w trzech pętlach)? Uzasadnić (krótko).

Zadanie 8 (2pkt) Jakie biblioteki można zastosować do rozwiązywania (1) dla dużych N?

Egzamin z obliczeń naukowych 2006
19 czerwca 2006, godz: 9-12

Uwagi wstępne

Wyniki wszystkich zadań z octave'a w jednym skrypcie i m-plikach.

Wyniki zadania z Bibliotek: jeden plik w C zawierający cały kod - i Makefile - komenda *make* ma kompilować program. Wyniki zadań teoretycznych max. jedna strona A4. Wszystkie pliki wysyłacie Państwo mailem na adres: `lmarcin@mimuw.edu.pl` lub `przykry@mimuw.edu.pl` -w zależności od osoby pilnującej, temat maila egzamin ON 06.

Niech **K** będzie sumą z zadań z Octave'a i Bibliotek komputerowych a **T** sumą punktów z zadań teoretycznych.

Warunkiem dopuszczenia do egzaminu ustnego jest $\mathbf{K} \geq \mathbf{10}$ i wtedy propozycję oceny będzie zależeć od $\mathbf{K} + \mathbf{T}$.

Octave

Mamy krzywą w R^2 zadaną przez równanie:

$$\{(x, y) \in R^2 : \quad F(x, y) = 0.5 * x^2 + \sin(x^2 + 2 * y^2) + y^2 + y - 2 = 0\}.$$

Przy założeniu że $\frac{\partial F}{\partial y}(x0, y0) \neq 0$ krzywa lokalnie przedstawia sie jako wykres funkcji $y = f(x)$ tzn

$$F(x, f(x)) = 0$$

Zadanie 1 (2pkt) Dla $x0 = 0$ sprawdź czy funkcja $g(y) = F(x0, y)$ dla $-1 \leq y \leq 1$, ma miejsce zerowe (np. czy zmienia znak na tym odcinku).

Zadanie 2 (3pkt) Znajdź wartość $y0$ taką że $F(0, y0) = 0$ czyli $y0 = f(0)$.

Zadanie 3 (4pkt) Policz wartości f dla $x \in [0, 1.5]$ na siatce równomiernej o $N = 100$ elementach.

Zadanie 4 (3pkt) Znajdź minimum i maksimum f na $[0, 1.5]$.

Zadanie 5 (3pkt) Narysuj wykres krzywej $(x, f(x))$ dla $x \in [0, 1.5]$.

Biblioteki

Mamy macierze A_1, A_2 rzeczywiste $N \times N$. Rozpatrzmy macierz

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^T & 0 \end{pmatrix}$$

Interesuje nas tzw dopełnienie Schura macierzy A

$$S = -A_2^T A_1^{-1} A_2$$

dobrze zdefiniowane gdy A_1 nieosobliwa.

Zadanie 6 (10pkt) Napisać funkcję która korzystając z funkcji `dgemm` z BLASów i `dgesv` z Lapacka obliczy S. Gdy macierz A_1 osobliwa funkcja ma wydrukować na ekran ostrzeżenie. Parametry wejściowe funkcji: macierze A_1, A_2 i wymiar N. Na wyjściu macierz S.

Zastosować do macierzy

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wynik wyprowadzić na ekran: w kolejnych dwu liniach - dwa wiersze macierzy S.

Teoria

Zadanie 7 (4pkt) Zastosowano metode Newtona do równania:

$$x * \sin(x) = 0$$

W wyniku otrzymano ciąg zbieżny do zera ale dla którego mamy

Nr iteracji :k	$\|x_k\|$
7	$3.48134e-05$
8	$8.70331e-06$
9	$2.17583e-06$

Czy mamy do czynienia ze zbieżnością kwadratową? Jeśli nie to uzasadnić (krótko!) czym to może być spowodowane.

Zadanie 8 (1pkt) Chcemy obliczyć $x = x * \sin(x(0))$ gdzie x wektor długosci 1000. Mam fragmenty kodu

```
for(k=0;k<1000;k++)      x(k)*=sin(x(0));
```

Czy ten fragment kodu jest napisany optymalnie, jeśli nie to jak go należy poprawić?

Zadanie 9 (2pkt) Jaką bibliotekę można zastosować do rozwiązywania dużego układu równań różniczkowych zwyczajnych w C?