Definicja kuli w $\Re^n$
Kulą o promieniu $r>0$ $r\in\Re$ i o środku w punkcie $p\in\Re^n$ nazywamy zbiór $\{x\in\Re^n: \rho(x,p)<r\}$

Definicja otoczenia punktu
Otoczenie punktu $p \in \Re^n$ to każdy zbiór w $\Re^n$ zawierający punkt p wraz z pewną kulą o środku w p.

Definicja punktu wewnętrznego zbioru
Punkt p jest punktem wewnętrznym zbioru, gdy należy do niego wraz z pewnym swoim otoczeniem

Definicja zbioru otwartego
Zbiór otwarty to zbiór składający się tylko z punktów wewnętrznych

Definicja punktu skupienia
Punkt p jest punktem skupienia zbioru A $\Leftrightarrow$ w każdym swoim otoczeniu zawiera conajmniej jeden punkt zbioru A różny od p

Definicja punktu brzegowego
Punkt nazywamy punktem brzegowym $\Leftrightarrow$ w każdym jego otoczeniu znajduje się punkt należący i punkt nie należący do zbioru

Definicja obszaru
Obszar to zbiór otwarty który nie da się przedstawić jako suma dwóch niepustych rozłącznych zbiorów otwartych

Definicja obszaru spójnego
Obszar spójny to obszar, którego dowolne dwa punkty da się połączyć łamaną zawartą w tym zbiorze

Definicja obszaru regularnego
Obszar regularny, to obszar ograniczony, którego brzeg da się podzielić na skończoną liczbę łuków (funkcji ciągłych typu $y=f(x)$ lub $x=g(y)$)

Definicja obszaru jednospójnego
Jeżeli każdy zbiór ograniczony, którego cały brzeg należy do obszaru D jest zawarty w D, to D nazywamy obszarem jednospójnym (nie ma dziur)

Definicja ciągłości funkcji w punkcie
Funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 \in \Re^n \Leftrightarrow$ f jest określona na pewnym otoczeniu x_0 i
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Uwaga
Istnienie granic iterowanych nie oznacza istnienia granicy funkcji w tym punkcie.

Przykład: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\, dla\,(x,y)\neq(0,0) \\ 0\, wpp \end{cases}$

Uwaga
Funkcja określona na zbiorze domkniętym i ciągła jest ograniczona, przyjmuje wartość minimalną i maksymalną i wszystkie wartości między nimi.
Suma, różnica, iloczyn, iloraz (jeśli nie przyjmuje 0) i złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Twierdzenie Bolzano-Cauchy'ego
Założenia:
D - obszar spójny
f - ciągła i określona na D
Teza:
Jeśli f przyjmuje w dwóch punktach tego obszaru wartości o różnych znakach, to istnieje punkt w tym obszarze, gdzie f przyjmuje wartość 0

Lemat Bolzano-Weierstrassa

Teza:

Z dowolnego ograniczonego ciągu punktów można wybrać podciąg zbieżny do pewnego punktu granicznego.

Uwaga

Funkcja n zmiennych ciągła po ustaleniu dowolnych n-1 z nich nie musi być ciągła.

Przykład: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} dla\,(x,y) \neq (0,0) \\ 0\, wpp \end{cases}$

Uwaga

Funkcja, która posiada obie pochodne cząstkowe nie musi być ciągła (muszą jeszcze być ciągłe).

Przykład: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} dla\,(x,y) \neq (0,0) \\ 0\, wpp \end{cases}$

Definicja klasy C^1

Funkcja jest klasy C^1 $\Leftrightarrow$ posiada wszystkie pochodne cząstkowe i są ciągłe

Twierdzenie

Założenia:

f klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu p

Teza:

f jest ciągła w p

Twierdzenie o pochodnej cząstkowej funkcji złożonej

Założenia:

g(x,y) i h(x,y) mają pochodne cząstkowe w (x_0,y_0)

f(u,v) jest klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu (u_0,v_0)

$u_0=g(x_0,y_0)$

$v_0=h(x_0,y_0)$

Teza:

Funkcja F(x,y)=f(g(x,y),h(x,y)) ma pochodne cząstkowe w (x_0,y_0) i

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

Twierdzenie o równości pochodnych mieszanych

Teza:

Jeżeli pochodne mieszane różniące się tylko kolejnością różniczkowania istnieją w pewnym otoczeniu punktu p i są ciągłe w p (pochodne, nie funkcja!) to są sobie równe w p

Definicja różniczki zupełnej

Funkcja f ma w punkcie (x_0,y_0) różniczkę zupełną Adx+Bdy $\Leftrightarrow$ istnieją stałe A,B t.ż.

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\left[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)\right] - (A\Delta x + B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

Twierdzenie

Założenia:

f jest klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu p

Teza:

f jest różniczkowalna w p i współczynniki są równe pochodnym cząstkowym w danym punkcie

Uwaga
Jeśli funkcja jest różniczkowalna, to posiada pochodne cząstkowe i współczynniki są równe pochodnym cząstkowym w danym punkcie. Wnioskowanie odwrotne nie jest jednak prawdziwe.

Kontrprzykład: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}\, dla\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ wpp \end{cases}$

Twierdzenie
Teza:
Złożenie funkcji różniczkowalnych jest funkcją różniczkowalną

Twierdzenie
Założenia:
f:$\Re^k \to \Re^n$ jest klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu x
g:$\Re^n \to \Re^m$ jest klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu y=f(x)
Teza:
g∘f:$\Re^k \to \Re^m$ ma macierz pochodnych cząstkowych i D(g∘f)(x)=D(g)(y)*D(f)(x)

Definicja jakobianu
Jakobian funkcji f J(f)(x)=det D(f)(x)

Wniosek
J(g∘f)=J(g)*J(f)

Twierdzenie
Założenia:
f:$\Re^n \to \Re^n$ jest klasy C^1
J(f)≠0 w pewnym punkcie p
Teza:
f jest różnowartościowa w pewnym otoczeniu p

Twierdzenie (warunek konieczny istnienia ekstremum)
Założenia:
f jest klasy C^1
f ma ekstremum w punkcie p
Teza:
Wszystkie pochodne cząstkowe się zerują w p

Definicja rozwikłania funkcji
Funkcja φ jest rozwikłaniem równania F(x,y)=0 w punkcie (x_0,y_0) ⇔
1. F(x,φ(x))=0
2. $y_0=f(x_0)$

Twierdzenie o funkcjach uwikłanych
Założenia:
F:$\Re^2 \to \Re$ jest klasy C^1 w otoczeniu punktu $p=(x_0,y_0)$
F(p)=0
$\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$
Teza:

w pewnym otoczeniu punktu x_0 jest określone rozwikłanie równania F(x,y)=0 wzgledem y przechodzące przez punkt $p=(x_0,y_0)$ i jest klasy C^1

Definicja maksimum warunkowego
f ma w punkcie p maksimum warunkowe przy warunku g(x,y)=0 $\Leftrightarrow$ $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$ dla wszystkich (x,y) z pewnego otoczenia p spełniających g(x,y)=0

Uwaga
Warunkiem koniecznym istnienia ektremum warunkowego jest $f_x*g_y=f_y*g_x$

Twierdzenie
Założenia:

P - obszar
f - funkcja określona na P
zbiór punktów nieciągłości f ma miarę 0

Teza:

f jest R-całkowalna

Twierdzenie
Założenia:

f i g są R-całkowalne

Teza:

1. $f\pm g$
2. f*g
3. f/g $(g\neq 0)$
4. cf (c-stała)
5. $|f|$

są R-całkowalne

Twierdzenie
Założenia:

P=<a,b>x<c,d>
f:P$\to\Re$
isnieje $\iint\limits_P f(x,y)\,dp$
dla każdego x$\in$<a,b> istnieje $\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$

Teza:

istnieje $\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$ i jest równa $\iint\limits_P f(x,y)\,dp$

Twierdzenie
Teza:

Każda funkcja ciągła w obszarze regularnym jest w nim R-całkowalna

Definicja obszaru normalnego
Obszarem normalnym względem zmiennej x nazywamy obszar określony zależnościami
1. a<x<b
2. $\varphi(x)<y<\psi(x)$

gdzie φ i ψ są funkcjami ciągłymi i $\varphi(x)<\psi(x)$

Twierdzenie
Założenia:

P - obszar normalny względem x
f:P$\to\Re$ ciągła i ograniczona

Teza:

$$\iint_P f(x,y)\,dp = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Twierdzenie

Założenia:

Δ,D - obszary regularne

φ: $\Delta \to$ D różnowartościowa i $\varphi(u,v)=(\chi(u,v),\delta(u,v))$

$J(\varphi)\neq 0$ w Δ

f:D$\to\Re$ jest klasy C^1

Teza:

$$\iint_P f(x,y)\,dp = \iint_\Delta f\big(\chi(u,v),\delta(u,v)\big)\left|J(\varphi)(u,v)\right| dq$$

FUNKCJE ZESPOLONE

Definicja funkcji zespolonej

f jest funkcją zespoloną, gdy f:C$\to$C

u:$\Re^2\to\Re$

v:$\Re^2\to\Re$

z=x+iy$\in$ C $\Rightarrow$ f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)

Definicja pochodnej zespolonej

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Twierdzenie (równania Cauchy-Riemanna)

Założenia:

istnieje f'(z)

Teza:

$u_x = v_y$ i $v_x = -u_y$

Uwaga

Jeśli równania Cauchy-Riemanna są spełnione, nie oznacza to, że pochodna istnieje

Przykład: $f(x,y) = \sqrt{|x+iy|}$

Twierdzenie

Założenia:

u(z) i v(z) są klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu z_0

u i v spełniają równania Cauchy-Riemanna

Teza:

istnieje f'(z)

Definicja funkcji pierwotnej funkcji zespolonej

Każdą funkcję F:D$\to$C, która jest różniczkowalna w D i F'(z)=f(z) nazywamy funkcją pierwotną funkcji f

Twierdzenie

Założenia:

f:D$\to$C ma funkcję pierwotną F w D

f jest ciągła w D

K - krzywa kawałkami gładka o początku w α i końcu w β zawarta w D

Teza:

Całka $\int_K f(z)dz = F(\beta) - F(\alpha)$ i nie zależy od drogi całkowania K

Wnioski
1. Jeśli f:D$\rightarrow$C ma funkcję pierwotną w D i jest ciągła w D oraz K jest krzywą zamkniętą, to $\int_K f(z)dz = 0$
2. Jeśli funkcja F spełnia w obszarze D równość F'(z)=0, to F jest stała
3. Jeżeli K jest krzywą zamkniętą kawałkami gładką to $\int_K c(z - z_0)^n dz$ dla n$\in$C\{-1}

FUNKCJE ANALITYCZNE

D - obszar płaski

Definicja funkcji analitycznej (holomorficznej)
Funkcja f jest analityczna w D $\Leftrightarrow$ posiada pochodną zespoloną w D

Uwaga
Funkcja analityczna posiada wszystkie pochodne.
Funkcja analityczna rozwija się w szereg Taylora (alternatywna równoważna definicja jest właśnie taka)

Twierdzenie całkowe Cauchy'ego
Założenia:

K - krzywa zamknięta kawałkami gładka
K jest brzegiem obszaru D
D'$\subset$D$\cup$K
f jest określona i analityczna w D'

Teza:

$\int_K f(z)dz$ =0

Definicja obszaru k-spójnego
Obszar, którego brzeg składa się z k krzywych zamkniętych (bez samoprzecięć) nazywamy obszarem k-spójnym

Twierdzenie (uogólnienie twierdzenia całkowego Cauchy'ego)
Założenia:

K - krzywa zamknięta kawałkami gładka
K $\subset$D'
obszar D' jednospójny
f określona i holomorficzna w D'

Teza:

$\int_K f(z)dz$ =0

Twierdzenie
Założenia:

D jest obszarem (n+1)-spójnym
D jest ograniczony przez krzywe $K_0, K_1, \ldots, K_n$

krzywe K_1, …, K_n leżą wewnątrz K_0

wszystkie krzywe mają taką samą orientację względem płaszczyzny

D' obszar t.ż. $D' \supset D \cup \bigcup_{i=0}^{n} K_i$

funkcja f jest określona i holomorficzna w D'

Teza:

$$\int_{K_0} f(z)\,dz = \int_{K_1} f(z)\,dz + \ldots + \int_{K_n} f(z)\,dz$$