Test Egzaminacyjny z Metod Numerycznych na ZSI

4 września 2002

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczamy pisząc 'TAK' (albo 'T'), a nieprawidłowe pisząc 'NIE' (albo 'N'), z lewej strony odpowiedzi.

UWAGA: Poszczególne pytania mogą mieć od zera do trzech prawidłowych odpowiedzi.

1. Niech a i b będą liczbami dodatnimi. Wtedy zadanie obliczania wyrażenia $\phi(a,b) = a^2 - b^2$ jest ze względu na dane $a, b \in \mathbb{R}$

- zawsze dobrze uwarunkowane
- dobrze uwarunkowane jeśli $|a - b| \geqslant 1$
- dobrze uwarunkowane jeśli $a/b \leqslant 10^{-6}$

2. Pewne zadanie, które jest dobrze uwarunkowane, rozwiązujemy używając pewnego algorytmu. Wtedy błąd względny rozwiązania

- jest mały
- może być duży, nawet jeśli algorytm jest numerycznie poprawny
- może być mały, nawet jeśli algorytm nie jest numerycznie poprawny

3. Algorytm eliminacji Gaussa z wyborem elementu głównego w kolumnie

- jest numerycznie poprawny
- daje rozwiązanie przybliżone z małym błędem względnym
- daje rozwiązanie przybliżone z małym błędem względnym jeśli uwarunkowanie macierzy jest małe

4. Rozpatrzmy zadanie wygładzania liniowego $A\vec{x} \approx \vec{b}$ z macierzą $A = (1, 2, 3, 4)^T$ oraz wektorem $\vec{b} = (1, 1, 1, 1)^T$. Rozwiązaniem zadania jest

- 3
- wektor $(1, 1/2, 1/3, 1/4)^T$.
- wektor $(1/30, 1/15, 1/10, 2/15)^T$

5. Wielomian $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ interpolujemy wielomianem Lagrange'a w_f w punktach $x_i = i$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Wtedy błąd interpolacji w danym punkcie x

- jest zerowy
- wynosi $a_n x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$
- jest zerowy jedynie w dwóch przypadkach: gdy $a_n = 0$, albo $a_n \neq 0$ i $x = i$, $1 \leqslant i \leqslant n$

6. Niech $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Niech w_f będzie wielomianem interpolacyjnym Hermite'a dla f opartym na dwukrotnym węźle 0 i jednokrotnym węźle 1. Wtedy

- $w_f(x) = 2x^2 + x + 1$
- $w_f(x) = q(x) + f(0, 0, 1)x^2$, gdzie $q(x)$ jest wielomianem interpolacyjnym Hermite'a opartym na dwukrotnym węźle 0
- $w_f(x) = q(x) + f(0, 0, 1)x(x-1)$, gdzie $q(x)$ jest wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a opartym na węzłach 0 i 1

7. Niech w_n będzie wielomianem interpolacyjnym dla funkcji $f(x) = \sum_{j=0}^{n+1} x^j$, opartym na $n+1$ węzłach-zerach wielomianu Czebyszewa T_{n+1}. Wtedy

- błąd interpolacji na przedziale $[-1, 1]$ wynosi 2^{-n}
- dla $n = 2$ mamy $f(2) - w_n(2) = 6$
- funkcja $f - w_n$ ma $n+1$ zer w przedziale $[-1, 1]$

8. Niech $Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} a_j f(t_j)$ będzie daną kwadraturą numeryczną przybliżającą całkę $I(f) = \int_a^b f(x)dx$, której rząd wynosi 12. Jeśli

- Q_n jest kwadraturą Gaussa dla $I(f)$ to $n = 5$
- $n = 20$ to Q_n nie jest kwadraturą interpolacyjną
- Q_n jest kwadraturą interpolacyjną to $n \leqslant 11$

9. Zdefiniujmy w przestrzeni wielomianów iloczyn skalarny $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\rho(x)\,dx$, gdzie ρ jest pewną wagą. Wtedy

- poddając wielomiany $p_0(x) = 1$ oraz $p_1(x) = x$ procesowi ortogonalizacji Grama-Schmidta z $\rho(x) = x$ otrzymujemy wielomiany $q_0(x) = 1$ oraz $q_1(x) = x - 2/3$
- kwadratura $Q(f) = (1/2)f(2/3)$ jest jednopunktową kwadraturą Gaussa dla przybliżenia całki $\int_0^1 f(x)x\,dx$
- rząd kwadratury $Q(f) = f(1/2)$ przybliżającej całkę $\int_0^1 f(x)x\,dx$ wynosi 2

10. Dla przybliżenia całki $\int_0^1 f(x)\,dx$ funkcji $f(x) = -x^2$ zastosowano kwadraturę trapezów. Błąd kwadratury

- wynosi $-1/6$
- jest taki sam jak dla funkcji $x^2 + x + 1$
- jest taki sam jak błąd kwadratury parabol (Simpsona)

11. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Do równania $f(x) = x$ zastosowano metodę iteracji prostej $x_n = f(x_{n-1})$ i otrzymano ciąg $\{x_n\}$ zbieżny do jedynego rozwiązania α tego równania. Jeśli

- ciąg x_n jest malejący albo rosnący to $0 < f'(\alpha) \leqslant 1$
- $f'(\alpha) < 1$ to ciąg x_n jest od pewnego momentu naprzemienny
- $x_{n-1} \neq \alpha$ i $x_n = \alpha$ to równanie $f'(x) = 0$ ma rozwiązanie

12. Jeśli metodę Newtona (stycznych) zastosujemy do równania nieliniowego $x^6 - 1 = 0$ z punktem startowym $x_0 \neq 0$ to

- ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ kolejnych przybliżeń będzie zawsze dobrze określony
- dla wszystkich n mamy $|x_n - 1| \leqslant C \cdot |x_{n-1} - 1|^2$, gdzie $0 < C < \infty$ jest pewną liczbą niezależną od n
- kolejne przybliżenia dane są wzorem $x_{n+1} = (1/5)(4x + x^{-5})$.

Test Egzaminacyjny z Metod Numerycznych na ZSI

18 czerwca 2003

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczamy pisząc TAK, a nieprawidłowe pisząc NIE, z lewej strony odpowiedzi.

UWAGA: Poszczególne pytania mogą mieć od zera do trzech prawidłowych odpowiedzi.

1. Zadanie obliczania sumy $\sum_{j=1}^{n} a_j$ dla danych rzeczywistych a_j, $1 \leqslant j \leqslant n$,

- jest dobrze uwarunkowane
- jest dobrze uwarunkowane gdy wszystkie liczby a_j są dodatnie
- nigdy nie jest dobrze uwarunkowane

2. Pewne zadanie rozwiązujemy używając algorytmu, który jest numerycznie poprawny. Wtedy błąd względny rozwiązania

- jest na poziomie błędu względnego reprezentacji danych
- może być dowolnie duży, nawet jeśli zadanie jest dobrze uwarunkowane
- jest na poziomie błędu względnego reprezentacji danych, gdy zadanie jest dobrze uwarunkowane

3. Uwarunkowanie $\mathrm{cond}_\infty(A)$ macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

w normie nieskończoność wynosi

- 16
- 9
- 4

4. W wyniku zastosowania eliminacji Gaussa z wyborem elementu głównego w kolumnie do macierzy z zadania **3** dostajemy rozkład $PA = LR$, gdzie

- $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
- $$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -0,5 \end{pmatrix}.$$
- $$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

5. Dla wielomianu $w(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ różnica dzielona $w(1, 1, 1, 2)$ wynosi

- 0
- 1
- -3

6. Niech $f(x) = x^{n+1} + \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$. Wtedy

- $f(x) - (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej n interpolującym f w punktach $x_0, \ldots, x_n$
- maksymalny błąd interpolacji funkcji f na przedziale $[-1, 1]$ opartej na dowolnych $n + 1$ węzłach wynosi co najmniej 2^{-n}
- węzły $x_0, x_1, \ldots, x_n$ można dobrać tak, że błąd interpolacji dla f opartej na tych węzłach na przedziale $[0, 2]$ jest ograniczony z góry przez 2^{-n}.

7 Kwadratura $Q(f) = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1)$ przybliżająca całkę $\int_0^2 f(x)dx$ jest kwadraturą interpolacyjną jeśli

- $a_0 = a_1 = 1$, $0 \leqslant x_0 \leqslant 2$, $x_1 = 2 - x_0$
- $a_0 = a_1 = 1/2$, $x_0 = 0$, $x_1 = 2$
- $a_0 = 2/3$, $a_1 = 4/3$, $x_0 = 0$, $x_1 = 3/2$

8. Złożoną kwadraturę trapezów T_k z równomiernym podziałem na k podprzedziałów stosujemy do przybliżenia całki $I = \int_0^{12} x^2/2 + 3x - 2/3\, dx$. Wtedy,

- dla $k = 10^3$ błąd $I - T_k = -10^{-4}$
- jeśli błąd $|I - T_k| \leqslant 10^{-4}$ to $k \geqslant 1200$
- błąd nie zmieni się gdy przedział całkowania $[0, 12]$ zamienimy na $[121, 133]$

9. Niech Q będzie kwadraturą opartą na n węzłach. Jeśli

- Q jest interpolacyjna i rząd$(Q) = 12$ to $6 \leqslant n \leqslant 13$
- Q nie jest kwadraturą interpolacyjną to rząd(Q) nie przekracza $n - 1$
- Q jest kwadraturą Gaussa to rząd$(Q) = 2n + 2$

10. Kwadraturę postaci $Q(f) = a_0 f(x_0)$ zastowano do przybliżenia całki z wagą $I(f) = \int_0^1 x^2 f(x)dx$. Kwadratura Q

- jest kwadraturą Gaussa jeśli $a_0 = 1/3$ i $x_0 = 3/4$
- jest kwadraturą Gaussa jeśli $a_0 = 1$ i $x_0 = 1/2$
- nie jest dokładna dla $f(x) = x^2$ jeśli $x_0 \neq 3/4$

11. Metodę iteracji prostej $x_n = f(x_{n-1})$ zastosowano do rozwiązania równania $x = f(x)$ z punktem startowym $x_0 = 0$. Jeśli f jest funkcją liniową ze współczynnikiem kierunkowym $a \neq$ to ciąg $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$

- nie zawsze zbiega do rozwiązania gdy $-1 < a < 0$
- jest naprzemienny gdy $a < 0$
- może zbiegać do rozwiązania nawet gdy $a < -1$

12. Do znalezienia odwrotności $1/a$ liczby dodatniej a zastosowano iteracyjną metodę Newtona (stycznych) z $f(x) = a - 1/x$. Wtedy ciąg kolejnych przybliżeń

- dany jest wzorem $x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$
- zbiega do rozwiązania dla dowolnego przybliżenia początkowego $0 < x_0 \leqslant 1/a$
- zbiega do rozwiązania dla dowolnego przybliżenia początkowego $0 < x_0 < 2/a$

Test Egzaminacyjny z Metod Numerycznych na ZSI

2 września 2003

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczamy pisząc TAK, a nieprawidłowe pisząc NIE, z lewej strony odpowiedzi.

UWAGA: Poszczególne pytania mogą mieć od zera do trzech prawidłowych odpowiedzi.

1. Zadanie obliczania sumy $\sum_{j=1}^{n} a_j^2$ dla danych rzeczywistych a_j, $1 \leqslant j \leqslant n$,

- jest dobrze uwarunkowane
- jest dobrze uwarunkowane gdy wszystkie liczby a_j mają ten sam rząd wielkości
- nie zawsze jest dobrze uwarunkowane

2. Pewne zadanie dobrze uwarunkowane rozwiązujemy używając pewnego algorytmu. Wtedy błąd względny rozwiązania

- jest na poziomie błędu względnego reprezentacji danych
- może być dowolnie duży, nawet jeśli algorytm jest numerycznie poprawny
- jest na poziomie błędu względnego reprezentacji danych, gdy algorytm jest numerycznie poprawny

3. Uwarunkowanie $\mathrm{cond}_1(A)$ macierzy

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

w normie pierwszej wynosi

- 8
- 9
- nie jest określone

4. W wyniku zastosowania eliminacji Gaussa z wyborem elementu głównego w kolumnie do macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

otrzymujemy rozkład $PA = LR$ gdzie

- $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}.$$
- $$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$
- $$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Dla funkcji

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^5 + x^4 - 3x^3 + 2 & x \leqslant 0 \\ x^3 - 16x + 2 & 0 < x < 4 \\ 2 & x \geqslant 4 \end{array} \right\}$$

różnica dzielona $w(1, 2, 2, 4)$ wynosi

- 6
- 1
- nie jest określona

6. Niech $f(x) = x^{n+1} + \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$. Niech w_n będzie wielomianem stopnia n interpolującym f w $(n+1)$ węzłach-zerach wielomianu Czebyszewa T_{n+1}. Wtedy błąd intepolacji $|f(x) - w_n(x)|$

- jest ograniczony przez 2^{-n}
- jest większy od 2^{-n} dla $x > 1$
- jest ograniczony przez $2^{-(n+1)}$ dla $|x| \leqslant 1$

7 Kwadratura $Q(f) = f(1) + 2f(2)$ przybliżająca całkę $\int_a^b f(x)dx$ jest kwadraturą interpolacyjną jeśli

- $a = 0$ i $b = 3$
- $a = 0$ i $b = \sqrt{10}$
- $a = 1/6$ i $b = 19/6$

8. Złożoną kwadraturę trapezów T_k z równomiernym podziałem na 100 podprzedziałów zastosowano do przybliżenia całki $I_H = \int_0^H x^2 - x + 1\, dx$. Wtedy błąd $|I_H - T_k|$

- jest równy $10^{-4}/6$ dla $H = 1$
- jest proporcjonalny do H^3
- jest odwrotnie proporcjonalny do k^2

9. Niech Q będzie kwadraturą opartą na $n + 1$ węzłach. Jeśli

- Q jest interpolacyjna to jest dokładna dla $w(x) = x^{2n+1}$
- Q nie jest kwadraturą interpolacyjną to nie jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnia dokładnie $n + 1$
- Q jest kwadraturą Gaussa to nie jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnia dokładnie $2n + 2$

10. Kwadraturę postaci $Q(f) = a_0 f(x_0)$ zastosowano do przybliżenia całki z wagą $I(f) = \int_0^1 x^3 f(x)dx$. i$Q$ jest odpowiednią kwadraturą Gaussa gdy

- $a_0 = 1/4$ i $x_0 = 1/2$
- $a_0 = 1$ i $x_0 = 1/2$
- $a_0 = 1$ i $x_0 = 4/5$

11. Metodę iteracji prostej $x_n = f(x_{n-1})$ zastosowano do rozwiązania równania $x = f(x)$ z punktem startowym $x_0 = 0$. Jeśli $f(x) = ax + 1$ $(a \neq 1)$ to ciąg $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$

- zbiega do rozwiązania wtedy i tylko wtedy gdy $-1 < a < 1$
- nie jest malejący
- jest monotoniczny dla pewnego $a < 0$

12. Do znalezienia pierwiastka $a^{1/3}$ liczby dodatniej a zastosowano iteracyjną metodę Newtona (stycznych) z $f(x) = x^3 - a$. Wtedy ciąg kolejnych przybliżeń

- dany jest wzorem $x_{n+1} = (2x_n - ax_n^{-2})/3$
- zbiega do rozwiązania dla dowolnego przybliżenia początkowego $x_0 \neq 0$
- zbiega do rozwiązania dla dowolnego przybliżenia początkowego $x_0 > a^{1/3}$