Zadania domowe 31-34

(termin: 15 czerwca 2020)

Zadanie 31.
Wykaż, że metoda bisekcji jest optymalna wśród algorytmów ϕ korzystających z (w ogólności wybranych adaptacyjnie) n wartości funkcji, w klasie F funkcji rosnących $f \in C([0,1])$ i takich, że $f(0) < 0 < f(1)$. Dokładniej, dla dowolnego takiego algorytmu ϕ błąd najgorszy

$$\sup_{f \in F} |x^*(f) - \phi(f)| \geqslant 2^{-(n+1)}.$$

(Tutaj $x^*(f)$ jest zerem funkcji f.)

Zadanie 32.
Niech x^* będzie punktem stałym odwzorowania $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, przy czym ϕ jest klasy C^1 w pewnym nietrywialnym otoczeniu x^* oraz $|\phi'(x^*)| < 1$. Wykaż, że wtedy istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego przybliżenia początkowego x_0 spełniającego $|x_0 - x^*| \leqslant \delta$, iteracje proste $x_k = \phi(x_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots$, zbiegają do x^*. Kiedy ciąg kolejnych przybliżeń x_k zbiega do x^* monotonicznie?

Zadanie 33.
Rozpatrzmy metodę iteracyjną

$$x_k \;=\; x_{k-1} \;-\; \frac{x_{k-1} - a}{f(x_{k-1}) - f(a)}\, f(x_{k-1}),$$

dla funkcji f, które są klasy C^1 w pewnym otoczeniu jej zera x^* i takich, że $f'(x^*) \neq 0$. Pokaż, że metoda ta jest lokalnie zbieżna liniowo o ile a jest dostatecznie blisko x^*. Jak blisko?

Zadanie 34.
Zaproponuj metodę iteracyjną obliczania $1/a$ dla dowolnego $a > 0$ nie używającą dzielenia. Jak wybrać przybliżenie początkowe, aby metoda była zbieżna? Jaki jest wykładnik zbieżności? (Wskazówka: zastosuj metodę Newtona do funkcji $f(x) = 1/x - a$.)