Zadania domowe 27-30

(termin: 8 czerwca 2020)

Zadanie 27.
Rozpatrzmy ciąg wielomianów ortogonalnych $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ w przestrzeni $\mathcal{L}_{2,\rho}(-1,1)$. Wykaż, że jeśli waga ρ jest parzysta, tzn. $\rho(x) = \rho(-x)$, to p_{2n} są wielomianami parzystymi, a p_{2n+1} są wielomianami nieparzystymi dla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Zadanie 28.
Wykaż, że całka

$$\int_a^b (x - x_0)^2 (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 \rho(x)\, \mathrm{d}x,$$

gdzie ρ jest pewną wagą, jest najmniejsza wtedy i tylko wtedy gdy za $x_0, \ldots, x_n$ weźmiemy zera $(n + 1)$-szego wielomianu ortogonalnego w przestrzeni $\mathcal{L}_{2,\rho}(a, b)$.

Zadanie 29.
Niech $Q(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(t_i)$ będzie kwadraturą o rzędzie $\mathrm{rz}(Q) = r$ dla aproksymacji całki $\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x$. Niech K będzie jądrem Peano tej kwadratury. Wykaż, że kwadratura

$$Q_{a,b}(f) = (b - a) \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i), \qquad \text{gdzie} \quad x_i = a + t_i(b - a),$$

aproksymująca całkę $S_{a,b}(f) = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$, ma także rząd $\mathrm{rz}(Q_{a,b}) = r$, a jej jądro Peano wynosi

$$K_{a,b}(x) = (b - a)^r K\left(\frac{x - a}{b - a}\right).$$

Zadanie 30.
Ile wynosi maksymalny rząd kwadratury opartej na czterech węzłach,

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 = b,$$

dla aproksymacji całki $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$? Czy potrafisz uogólnić wynik na przypadek, gdy węzłów jest $n + 1$, przy czym $x_0 = a$ i $x_n = b$?