Zadania domowe 23-26

(termin: 30 maja 2020)

Zadanie 23.
Ile wynosi maksymalny rząd kwadratur opartych na $n+1$ węzłach, przy czym każdy węzeł jest dwukrotny?

Zadanie 24.
Niech x_j dla $0 \leqslant j \leqslant n$ będą zerami $(n+1)$-szego wielomianu ortogonalnego w przestrzeni $\mathcal{L}_{2,\rho}(a,b)$. Niech dalej $l_j \in \Pi_n$ będą odpowiadającymi tym węzłom wielomianami Lagrange'a. Wykaż, że dla $f, g \in \Pi_n$ iloczyn skalarny w $\mathcal{L}_{2,\rho}(a,b)$ można wyrazić jako

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{L}_{2,\rho}} := \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j)g(x_j),$$

gdzie $w_j = \|l_j\|^2_{\mathcal{L}_{2,\rho}} = \langle l_j, l_j\rangle_{\mathcal{L}_{2,\rho}}$.

Zadanie 25.
Wykaż, że jeśli $|a| \leqslant \frac{1}{2}$ to

$$\sup_{f\in C_1^2([-1,1])} \int_{-1}^{1} (x^2-a^2) f[-a,a,x]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2-a^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - a^2.$$

Zadanie 26.
Niech F będzie klasą funkcji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ takich, że $f(0) = f(1)$ oraz f jest lipschitzowska ze stałą 1. Całkę

$$S(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad f \in F,$$

aproksymujemy algorytmem używającym jedynie wartości f w n punktach, tzn. przy pomocy formuły

$$A_n(f) = \Phi\Big(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\Big),$$

gdzie $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant 1$, a $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest dowolnym przekształceniem. Jak dobrać punkty x_i oraz przekształcenie Φ aby zminimalizować błąd

$$E_n(\Phi, x_1, \ldots, x_n) = \sup_{f\in F}\Big|S(f) - \Phi\Big(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\Big)\Big|,$$

czyli błąd najgorszy aproksymacji całki w klasie F?