Zadania domowe 19-22

(termin: 21 maja 2020)

Zadanie 19.
Uzasadnij, że stała Lebesgue'a

$$\Lambda_n := \inf_{a \leqslant x_0 < \cdots < x_n \leqslant b} \Lambda(x_0, \ldots, x_n),$$

gdzie $\Lambda(x_0, x_1, \ldots, x_n) := \max_{a \leqslant x \leqslant b} \sum_{j=0}^{n} |l_j(x)|$, a l_j są wielomianami Lagrange'a dla węzłów $x_0, \ldots, x_n$, nie zależy od wyboru przedziału $[a, b]$.

Zadanie 20.
Niech $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją sklejaną rzędu pierwszego (tzn. funkcją ciągłą i kawałkami wielomianem stopnia $\leqslant 1$) opartą na węzłach $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Wykaż, że s można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$s(x) = a + bx + \sum_{j=0}^{n} c_j |x - x_j|$$

dla pewnych a, b, c_j, $0 \leqslant j \leqslant n$.

Zadanie 21.
Niech $S(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ i kwadratura

$$Q_1^I(f) = \frac{b-a}{2}\left(f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right).$$

Pokaż nierówność

$$\sup_{f \in F_M^1([a,b])} |S(f) - Q_1^I(f)| \leqslant \frac{11}{324} M(b-a)^3.$$

i porównaj wynik z błędem kwadratury interpolacyjnej opartej na węzłach u_0^* i u_1^* będących zerami wielomianu Czebyszewa U_2.

Zadanie 22.
Rozpatrzmy kwadraturę

$$\bar{Q}_k(f) = \bar{T}_k(f) - \frac{(b-a)^2}{12k^2}\Big(f'(b) - f'(a)\Big),$$

gdzie $\bar{T}_k$ jest złożoną kwadraturą trapezów z podziałem na k podprzedziałów, dla aproksymacji całki $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pokaż, nie korzystając z formuły Eulera-Maclaurina, że jeśli funkcja $f \in C^4([a,b])$ to błąd $|S(f) - \bar{Q}_k(f)|$ zbiega do zera co najmniej tak szybko jak k^{-4}, gdy $k \to +\infty$. W szczególności, dla funkcji spełniających $f'(a) = f'(b)$ rząd zbieżności złożonej kwadratury trapezów $\bar{T}_k$ wynosi k^{-4}.