

Zadania domowe 14-18

(termin: 11 maja 2020)

Zadanie 14.

Zaproponuj algorytm obliczania wartości $p(x)$ wielomianu p danego przez współczynniki c_0, c_1, \dots, c_n jego rozwinięcia w bazie Czebyszewa, tzn.

$$p(x) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x).$$

Algorytm ma działać w czasie proporcjonalnym do n .

Zadanie 15.

Wykaż, że spośród wielomianów p stopnia co najwyżej n spełniających $p'(1) = A$, najmniejszą normę jednostajną na $[-1, 1]$ ma wielomian AT_n/n^2 , gdzie T_n jest n -tym wielomianem Czebyszewa.

Zadanie 16.

Wyznacz w bazie potęgowej wielomian $w \in \Pi_3$ najlepiej aproksymujący funkcję $f(x) = 128x^4$ w przestrzeni $C([0, 1])$.

Zadanie 17.

Znajdź współczynniki a_0, a_1, a_2 wielomianu trygonometrycznego

$$g(t) = a_0 + a_1 \cos t + a_2 \sin t,$$

który najlepiej aproksymuje funkcję $f(t) = |\sin(t/2)|$ w przestrzeni $C([-π, π])$.

Zadanie 18.

Wykaż, że n -ty wielomian optymalny $w_{f,n}^* \in \Pi_n$ dla funkcji $f \in C([a, b])$ jest jednoznacznie wyznaczony. (Wskazówka: użyj twierdzenia o alternansie.)