Zadania domowe 6-10

(termin: 15 kwietnia 2020)

Zadanie 6.
Do nieosobliwej macierzy Hessenberga $A = (a_{i,j}) \in \mathbf{R}^{n,n}$, tzn. takiej, że $a_{i,j} = 0$ dla $i \geq j+2$, zastosowano algorytm eliminacji Gaussa z wyborem elementu głównego w kolumnie otrzymując rozkład trójkątno-trójkątny $PA = LU$, gdzie P jest macierzą permutacji, $L = (l_{i,j})$ macierzą trójkątną dolną z jedynkami na przekątnej i $|l_{i,j}| \leq 1$, a $U = (u_{i,j})$ macierzą trójkątną górną. Wykaż, że

$$\left(\max_{1\leq i,j\leq n} |u_{i,j}|\right) \leq n \left(\max_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|\right).$$

Czy to oszacowanie można poprawić gdy dodatkowo $A = A^T$?

Zadanie 7.
Wykaż, że dla macierzy $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ z dominującą wierszowo przekątną, tzn. gdy

$$2\,|a_{i,i}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|, \qquad 1 \leq i \leq n,$$

eliminacji Gaussa bez jest wykonalna bez przestawień wierszy/kolumn. Co więcej, w wyniku dostajemy rozkład $A = LU$, gdzie

$$\left(\max_{1\leq i,j\leq n} |u_{i,j}|\right) \leq 2^{n-1} \left(\max_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|\right).$$

Zadanie 8.
Zaproponuj algorytm rozwiązywania układu równań liniowych $A\vec{x} = \vec{b}$ z macierzą nieosobliwą $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ taką, że $a_{i,j} = 0$ dla $|i-j| \geq 2$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq n$. (Zauważ, że ostatni wiersz jest w ogólności pełny.) Algorytm ma działać w czasie liniowym w n i być numerycznie poprawny.

Zadanie 9.
Stosując odbicia Householdera $H_i = I - \vec{u}_i\vec{u}_i^T/\gamma_i$ sprowadź macierz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ -5 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

do postaci trójkątnej górnej $R = H_2H_1A$. Wskaż współczynniki macierzy R oraz odpowiednie wektory $\vec{u}_i$ i liczby γ_i, $i = 1, 2$.

Następnie, korzystając z rozkładu, znajdź

$$\min_{\vec{x}} \|\vec{b} - A\vec{x}\|_2$$

dla $\vec{b} = [-4, 1, -3, 4]^T$. Jaki wektor realizuje powyższe minimum?

Zadanie 10.
Przedyskutuj jednoznaczność rozkładu SVD danej macierzy $A \in \mathbb{R}^{m,n}$,

$$A = U \Sigma V^T,$$

gdzie $U \in \mathbb{R}^{m,m}$ i $V \in \mathbb{R}^{n,n}$ są macierzami ortogonalnymi, a $\Sigma \in \mathbb{R}^{m,n}$ macierzą diagonalną.