Zadania domowe 1-5

(termin: 3 kwietnia 2020)

Zadanie 1.
Wykaż, że dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{C}^{m,n}$ mamy:
(i)

$$\|A\|_2^2 \le \|A\|_1 \|A\|_\infty,$$

(ii)

$$\|A\|_2 = \sup_{\vec{z}} \sup_{\vec{y}} \left| \vec{y}^H A \vec{z} \right|,$$

gdzie suprema są wzięte po $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$ i $\vec{y} \in \mathbb{C}^m$ takich, że $\|\vec{z}\|_2 = 1 = \|\vec{y}\|_2$.
Z (ii) wywnioskuj, że $\|A\|_2 = \|A^H\|_2$.

Zadanie 2.
Niech macierz A dana będzie w postaci blokowej,

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Wykaż, że dla dowolnych i, j mamy $\|A_{i,j}\|_p \le \|A\|_p$, gdzie $1 \le p \le \infty$.

Zadanie 3.
Rozpatrzmy arytmetykę *stałoprzecinkową* fx_ν, gdzie różnica pomiędzy liczbą rzeczywistą x a jej reprezentacją $fx_\nu(x)$ wynosi $|x - fx_\nu(x)| \le \nu$.

Powiemy, że algorytm Φ realizujący przekształcenie $S : F \to G$, gdzie F i G są otwartymi podzbiorami przestrzeni unormowanych, jest w tej arytmetyce *numerycznie poprawny* gdy istnieją stałe K_1, K_2 o następującej własności: dla dowolnych danych $f \in F$ i dostatecznie silnej arytmetyki ($\nu \le \nu_0$) istnieją dane f_ν takie, że

$$\|f - f_\nu\|_F \le K_1 \nu \qquad \text{oraz} \qquad \|fx_\nu(\Phi(f)) - S(f_\nu)\|_G \le K_2 \nu.$$

($fx_\nu(\Phi(f))$ jest tu wynikiem zwracanym przez Φ w arytmetyce fx_ν dla danych f.)

Niech teraz Φ_1, Φ_2 będą algorytmami numerycznie poprawnymi realizującymi, odpowiednio, przekształcenia $S_1 : X \to Y$ oraz $S_2 : Y \to Z$. Wykaż, że jeśli S_2 spełnia warunek Lipschitza w Y to złożenie $\Phi_2 \circ \Phi_1$ realizujące przekształcenie $S = S_2 \circ S_1 : X \to Z$ jest też algorytmem numerycznie poprawnym.

Zadanie 4.
Wykaż, że naturalny algorytm obliczania cosinusa kąta pomiędzy wektorami $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$,

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sum_{j=1}^n a_j b_j}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right)}},$$

jest numerycznie poprawny. Oszacuj błąd względny wyniku w fl_ν.

Zadanie 5.
Jeśli dla macierzy nieosobliwej $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ i wektora $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ zachodzi

$$(A+E)\vec{x} = \vec{b}, \qquad \text{gdzie} \quad \|E\|_p \leq K\,\nu\,\|A\|_p, \tag{1}$$

to dla residuum $\vec{r} = \vec{b} - A\vec{x}$ mamy

$$\|\vec{r}\|_p \leq K\,\nu\,\|A\|_p \|\vec{x}\|_p. \tag{2}$$

Wykaż, że dla $p = 1, 2, \infty$, prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne: jeśli spełniony jest warunek (2) to istnieje macierz E taka, że $\|E\|_p \leq K\nu\|A\|_p$ i spełniona jest nierówność (1),